

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

УДК 629.783

На правах рукописи

ДОСЖАН НҰРСҰЛТАН САҒЫНАЙҰЛЫ

Разработка алгоритмов управления движением спутников в группировке

диссертация на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности

6D074600 – Космическая техника и технологии

Отечественный научный консультант:
к.ф.-м.н, доцент
Ракишева З.Б.

Зарубежный научный консультант:
PhD, профессор Nakasuka Sh.

Республика Казахстан
Алматы, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВ В СЛУЧАЕ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ.....	16
1.1 Разработка математической модели движения группировки спутников в случае невозмущенной опорной орбиты	16
1.2 Построение алгоритмов управления конфигурацией группировки в случае невозмущенной опорной орбиты.....	21
1.3 Результаты численного моделирования управляемого движения группировки для обеспечения удержания конфигурации группировки	27
2 ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВ В СЛУЧАЕ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ С УЧЕТОМ ОСНОВНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ	34
2.1 Разработка математической модели движения группировки спутников в случае невозмущенной опорной орбиты с учетом основных возмущающих сил	34
2.2 Построение алгоритмов управления конфигурацией группировки спутников с учетом основных возмущающих сил	37
2.3 Результаты численного моделирования движения группировки	41
3 ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВ В СЛУЧАЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ С УЧЕТОМ ОСНОВНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.....	52
3.1 Разработка математической модели движения группировки спутников в случае возмущенной опорной орбиты с учетом основных возмущающих сил	52
3.2 Построение алгоритмов управления конфигурацией группировки в случае возмущенной опорной орбиты с учетом неопределенностей	56
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	64
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	66

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ДЗЗ	- дистанционное зондирование Земли;
ИСК	- инерциальная система координат;
КА	- космический аппарат;
МКА	- малый космический аппарат;
ОСК	- орбитальная система координат;
LMI	- линейное матричное неравенство;
LVLH	- локально-вертикальная, локально-горизонтальная система;
LQR	- линейно-квадратичный регулятор;
RLM	- метод размещения корней;

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. На сегодняшний день все больше ученых в области космических исследований предпочитают изучать группировки спутников вместо одиночных. Это связано с тем, что такие группировки спутников состоят из малых космических аппаратов к примеру, таких как микро- и наноспутников, создание которых требует небольшой срок и ресурсов. Более того, группировки спутников позволяют решать множество новых задач, которые не под силу одному спутнику. Например, применение группировки спутников очень важно при одновременных исследованиях одного и того же объекта или явления с различных пространственных точек. Группировки спутников также представляют большой интерес для астрономического мониторинга и дистанционного зондирования Земли в режиме непрерывной съемки. Наряду с новыми возможностями перед учеными возникают и новые проблемы. Одна из таких основных задач заключается в создании алгоритмов управления движением спутников в группировке для сохранения ее определенной конфигурации.

Группировка спутников представляет собой технологию, включающую несколько космических аппаратов в определенной контролируемой конфигурации для достижения общей цели. Эффективное и надежное управление конфигурацией таких группировок во многом зависит от созданных математических моделей и алгоритмов управления движением спутников в группировке. Относительное движение нескольких спутников описываются уравнениями Хилла [1] или уравнениями Клохесси-Уилтшера [2]. Тем не менее, эти модели базируются на предположении о круговой и невозмущенной орбите, что снижает точность управления группировкой. Высокая точность управления движением является ключевым требованием для создания алгоритмов управления движением спутников в группировке, используемых для мониторинга поверхности Земли.

Для преодоления сложностей в управлении группой спутников, авторы [3] разработали линейную систему управления с обратной связью. Она использует импульсные регуляторы и основана на дискретной модели Клохесси-Уилтшера. С применением постоянного нарастающего коэффициента авторы доказали, что данная система остается стабильной и устойчивой при регулярном усилении. В работе [4] представлены результаты применения нескольких общих стратегий управления к задаче поддержания и маневрирования группы спутников для дистанционного зондирования Земли. Эти стандартные методы включают как линейные, так и нелинейные методологии управления которые могли обеспечить устойчивость при отсутствии различных возмущений. Однако, несмотря на устойчивость системы, разработанное в данном исследовании управление не учитывает возмущения характерные для высоких орбит что играет большую роль для сохранения конфигурации группировки спутников.

Предложенные контроллеры в [5] специализированы для управления группировкой спутников в виртуальной структуре с обеспечением робастной

устойчивости и надежных характеристик при наличии всех значимых систематических и орбитальных неопределенностей, таких как изменения эксцентриситета и большой полуоси, воздействия J_2 , неучтенные гармоники высших порядков, а также шум от исполнительных механизмов и измерительных блоков. Также, контроллеры разработаны для как удержания позиции, так и для реконфигурации спутников в виртуальной структуре. Несмотря на такие результаты в данной работе не были учтены возмущения возникающие за счет гравитационных полей Луны и Солнца, что в свою очередь значительно влияет на сохранение конфигурации группировки спутников на геостационарной орбите.

В исследовании [6] выводится связанная динамика относительного перемещения и вращения группировки спутников типа "лидер-последователь", что позволяет выделить естественный эффект связи. На основе полученной относительной связанной динамики предложен новый устойчивый адаптивный закон управления терминальным режимом с адаптивными алгоритмами для решения задачи управления отслеживанием с шестью степенями свободы при формировании группировки спутников типа лидер-последователь. Доказано, что предложенный закон управления способен привести относительное поступательное и вращательное движение на желаемую траекторию за конечное время, несмотря на наличие неопределенностей модели и внешних возмущений. Также разработан модифицированный контроллер, который решает проблему двойного равновесия, вызванную двойным представлением кватернионов.

В работе [7] рассматривается задача поддержания группировки в условиях ограничений на направления векторов тяги. Группировка состоит из двух спутников: спутник-заместитель оснащен одним или двумя двигателями, ориентированными вдоль заданной оси. Показана возможность получения периодического относительного движения главного и заместителя спутников для нескольких типов одноходового управления. В каждом случае выводятся достаточные условия управляемости. Одноосное управление, полученное численно для системы уравнений Швайгарда-Седвика, достаточно для обеспечения почти замкнутых траекторий. Также доказано, что неточность, вызванная ошибками модели Швайгарда-Седвика, можно исправить.

В статье [8] демонстрируется, что простая модель аэродинамической силы способна управлять трехмерным относительным движением. Эта модель включает в себя компонент "лифт". При разработке алгоритма бортового управления используются упрощенные модели относительного движения и плотности атмосферы, что существенно снижает вычислительную сложность. Предложен метод анализа, который позволяет найти параметры алгоритмов управления, обеспечивающие отсутствие насыщения управления при заданных отклонениях траектории от желаемой. Исследуется конкретный алгоритм управления на основе LQR. В примере указывается, что заданная в алгоритме плотность атмосферы должна быть выше реальной плотности. Это обеспечивает отсутствие насыщения управления и сходимости отклонения траектории к нулю.

Вышеупомянутые исследования представляют собой значительный вклад в создании систем управления движением группировок спутников и демонстрируют весьма неплохие результаты. Однако предложенные алгоритмы неприменимы для формулировки условий устойчивости конфигурации группировки на таких орбитах как геостационарная, поскольку в задаче не рассматриваются возмущения за счет неоднородности гравитационного поля Земли, помимо этого возмущения от Луны и Солнца.

Авторами [9] основное внимание уделено одному из приложений группового полета, где требуется управляемый космический аппарат для наблюдения за конкретной поверхностью целевого космического аппарата. Это достигается с помощью двух космических аппаратов, сохраняющих одну и ту же ориентацию и перемещающих орбиту главного космического аппарата в подходящее положение. Для выполнения этой задачи необходима измеримая относительная информация между главным космическим аппаратом и целью, а также абсолютная угловая скорость главного космического аппарата относительно инерциальной системы координат. В статье представлены уравнения относительной динамики положения и ориентации для группового полета, а также обсуждается возможный алгоритм управления отслеживанием положения и ориентации. В данном исследовании рассматривается группировка типа "лидер-последователь", в которой используется только 2 космических аппарата.

В статье [10] исследователи разрабатывают законы управления с обратной связью на основе импульсов и дискретного времени. В частности, созданы контроллеры с полной обратной связью, обеспечивающие стабильность замкнутого контура при использовании исполнительных механизмов импульсного типа. Разработана схема импульсного управления, также проведено моделирование динамики взаимного положения космических аппаратов.

В работе [11] представлена адаптивная система управления для координации и управления группировкой малых космических аппаратов, движущихся в строю в условиях постоянных возмущений. Группировка космических аппаратов рассматривается как совокупность систем, взаимодействующих друг с другом для достижения общей цели. Поведение во временной области управляемого движения группировки с обратной связью, находящегося на типичных низких околоземных орбитах, изучается как аналитически, так и с использованием компьютерного моделирования. Особое внимание уделяется обеспечению устойчивости группировки и эффективности управления в условиях наличия различных видов постоянных, но неизвестных возмущений.

В исследовании [12] представлен инновационный метод проектирования управления с использованием методов анализа устойчивости гибридной системы, который применяется к задаче управления относительным положением спутника. Полученные результаты анализируются. Формулировка задачи естественным образом вписывается в структуру гибридной системы управления, поскольку орбитальная динамика

рассматривается как "непрерывная", тогда как контроллеры являются "дискретными", действующими лишь время от времени и периодически. Используя предложенный метод, было достигнуто разумный баланс между требованиями к точности относительного положения и доступными усилиями по управлению.

Преобразование нелинейных моделей в линейные уравнения Клохесси-Уилтшера и Лоудена, учитывая орбитальные возмущения, открыло возможность применения методов нелинейной теории управления для решения задач управления группировкой спутников. В работе [13] был изучен метод, позволяющий самостоятельно формировать кольцо спутников. В этом подходе используется информация о расстоянии между спутниками для создания радиальных и поперечных ускорений с небольшой тягой. Для этой цели применялось нелинейное управление, основанное на принципах теории Ляпунова. А в статье [14] была исследована проблема координации и управления группой микроспутников, движущихся в строю. Каждый микроспутник моделируется как твердое тело с фиксированным центром масс. Сначала рассматриваются различные схемы для создания желаемых структур группировки. Затем выводятся конкретные законы управления, направленные на поддержание строя и относительного выравнивания ориентации на основе отслеживания ближайших соседей.

Для координации спутников в группировке также была применена система управления на основе нечеткой логики. В исследовании [15] нечеткое управление группировкой спутников применяется для управления их нелинейной и изменчивой во времени относительной динамикой при движении по эллиптическим орбитам. Этот подход включает определение нечетких переменных и функций принадлежности, установку нечетких правил, вывод на основе нечеткой логики и дефаззификацию. Кроме того, в данной работе представлено общее пропорционально-дифференциальное управление для улучшения реакции системы, где матрицы управления ПД могут быть определены с использованием линейно-квадратичного оптимального метода. Аналогично, в исследовании [16], основанной на уравнениях Хилла, применяется технология малой тяги с использованием нечеткой теории управления. Для нечеткого контроллера ошибки относительного положения, скорости и ускорения выбираются в качестве нечетких входных переменных. Сравнение моделирования включает два аспекта: ошибку относительного положения для удержания группировки и расход топлива. Эти результаты сравниваются с системами оптимального управления Bang-Bang и оптимальным управлением по расходу топлива и времени.

В исследованиях [17]–[21] обсуждаются аспекты орбитальной динамики, а также относительного положения и ориентации группировки космических аппаратов, выполняющих разнообразные задачи. Представлены методы и алгоритмы управления сравнительного движениями космических аппаратов. Для иллюстрации предложенных принципов управления

рассматриваются задачи разработки заданной конфигурации группировки, маневрирования и поддержания конфигурации.

В работах [22]-[25] рассматриваются методы сохранения конфигурации группировок космических аппаратов. Выполнено сравнение разнообразных алгоритмов управления, включая линейно-квадратичный регулятор (LQR), SDRE (уравнение Риккати, зависящее от состояния), линейно-квадратичный гауссовский регулятор, алгоритм управления с восстановлением через циклический перенос и алгоритм управления с линейным квадратичным интегрированием.

Целью исследований [26, 27] является разработка испытательной модели Synthetic Imaging Formation Flying Testbed (SIFFT) для разработки и испытания алгоритмов, обеспечивающих автономную группировку космических аппаратов с высокой точностью. Данная конфигурация состоит из трех движущихся космических аппаратов, для поддержания их координат и относительного позиционирования используются PID-регуляторы.

В исследованиях [28]-[30] анализируются разные виды группировок космических аппаратов, указываются их достоинства и недостатки. Также описываются алгоритмы управления группировкой с изменяемыми конфигурациями.

Ориентация спутника производится через регулирование двух ключевых параметров: угловой скорости и высоты. Авторы [31, 32] описали методы управления положением и ориентацией спутников что находится на геосинхронных орбитах с использованием разнообразных контроллеров, таких как ПИД-регулятор, управление со скользящим режимом и адаптивный нечеткий ПИД-регулятор.

Задача относительного движения двух космических аппаратов базируется на модели Клохесси-Уилтшира (C-W) [33]. В работах [34, 35] используется линейная модель Хилла-Клохесси-Уилтшира для анализа относительного движения космических аппаратов в группировке, обеспечивающая сохранение определенных параметров конфигурации. В [35] описан метод относительного орбитального элемента (ROEM). Сравняются результаты методов C-W и ROEM, а также обсуждаются ограничения уравнений C-W.

В статьях [36, 37] описаны алгоритмы для управления совместным регулированием спутников в группировке. Разбирается управление рядом микроспутников, в том числе управление группировкой спутников, управление ориентацией и орбитами группировки. В [36, 38] анализированы системы управления движением группировок спутников разной структуры на основе оптимизации времени и топлива.

В статье [39] представлены несколько новых технологий, связанных с групповыми полетами. Одной из таких технологий является инициализация орбиты с минимизацией дрейфа, что критически важно для уменьшения расхода топлива, необходимого для группировки спутников на высокоэллиптических орбитах.

В [40] поставлена задача управления и стабилизации геосинхронного спутника при воздействии периодических моментов солнечного давления и градиента силы тяжести. Спутник должен был быть выведен на необходимую орбиту, однако с начальными небольшими углами ориентации. Решение проблемы точки спутника и стабилизации его орбиты в течение одного дня было найдено с применением нейронной схемы прогнозирующего управления.

Авторы [41] предложили надежный контроллер для управления группировкой спутников, учитывающий нелинейности, параметрические неопределенности и внешние возмущения. Разработанный контроллер состоит из контроллера положения, обеспечивающего вычисление траекторий, и схемы конфигурации, а также контроллера ориентации, который выравнивает ориентацию каждого спутника.

В работе [42] анализируется задача управления группировкой космических аппаратов, летающих по коллинеарным орбитам в точках Лагранжа. Для получения номинальной траектории был принят метод дифференциальной коррекции, а для получения явного приближения использовался усеченный ряд Фурье.

В исследовании [43] был представлен разработанный нелинейный адаптивный закон управления для отслеживания относительного положения нескольких спутников, движущихся в группировке. Было показано, что с применением метода проектирования и анализа на основе функции Ляпунова предложенный контроллер обеспечивает глобальные асимптотические ошибки отслеживания положения, компенсируя при этом неизвестные массы спутников, воздействия внешних возмущений и силу гравитации.

Диссертация предлагает использовать группировку спутников, летающих на геостационарной орбите, для обеспечения зондирования большей поверхности Земли с высоким временным и пространственным разрешением. Эта группировка иллюстрирует телескопа с синтезированной апертурой в виде Физо, гарантируя высокое пространственное разрешение, аналогичное разрешающей способности одиночного громоздкого телескопа с подходящей оптической системой [44]. Применение нескольких апертурных телескопов обеспечивает получение изображения поверхности Земли хорошего качества посредством трех или более спутников, которые действуют как их оптические компоненты [45–51].

Из-за ограничений в размерах обтекателя ракеты-носителя и сложностей в точном управлении крупными конструкциями групповой полет становится единственным способом значительного улучшения углового разрешения будущих космических телескопов и интерферометров. Существенные разработки технологий и системного проектирования заложили основы для реалистичных прогнозов успешного осуществления этих сложных групповых полетов [52].

В работе [53] разработаны методы управления космическим аппаратом для полета в жестко связанной группировке с учетом ограничений исполнительного механизма. Ранее предпринимавшиеся попытки управления

группировкой космических аппаратов не учитывали ограничения насыщения приводов. Для учета этого ограничения необходимо обеспечить достаточно медленное движение группировки, чтобы каждый космический аппарат мог точно следовать заданной траектории с учетом допуска. Для этого авторы разработали концепцию требуемой конфигурации группировки, привязанного к виртуальной торсионной пружине. Желаемые траектории для каждого космического аппарата генерируются на основе требуемой траектории группировки.

В исследовании [54] проводится анализ текущего состояния групповых космических миссий и соответствующих технологий. Основное внимание уделяется миссии интерферометрии Дарвин, которая направлена на обнаружение и характеристику экзопланет вне Солнечной системы. Для реализации миссии Дарвин требуется точная группировка нескольких телескопов вблизи точки L2 системы Солнце-Земля.

Работа [55] представляет точное моделирование управления относительным движением спутников в группировке. Введена новая матрица перехода состояний, которая учитывает несферическую симметрию распределения масс Земли до J22 в аналитическую модель. Учетное возмущение воздействует на спутники при выходе на их орбиту, что приводит к изменению конфигурации группировки. С одной стороны, необходимо сохранить относительное положение как можно более жестко для обеспечения пространственного разрешения системы формирования изображения. В то же время, спутники должны оставаться в своих продольных пазах. Управляющая система основана на технологии LQR.

Для эффективной работы телескопа с синтезированной апертурой необходима система управления, способная поддерживать конфигурацию спутниковой группировки, учитывая возмущения, характерные для геосинхронных орбит, к примеру неоднородности гравитационного поля Земли, воздействия Луны и Солнца, давление солнечного света и т. д. Это подразумевает необходимость создания относительной динамической модели и контроллера для спутниковой группировки.

Для группировки космических аппаратов применяются различные относительные динамические модели. Множество из них являются моделями динамики относительного полета, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями [56–60], которые устанавливаются в системе координат Локально-Вертикальный-Локально-Горизонтальный (LVLH), связанной с материнским спутником. Хилл, Клохесси и Уилтшер [61, 62] создали модель линейного относительного движения, исключив влияние возмущающих сил и предположив, что гравитационное поле Земли является однородным. В исследовательской работе [63] изучается движение по инвариантным относительным орбитам, на которое влияют зональные гармоники второго порядка на экваториальной орбите. Для постановки задачи используется гамильтонов формализм. Были выведены все возможные условия инвариантного относительного движения для различных наклонов орбит ведомых спутников. Эти условия второго порядка гарантируют, что

скорость дрейфа не позволит двум или более соседним орбитам расходиться. Условия были смоделированы, а также рассмотрены все варианты выбора средних элементов орбиты ведущего спутника и различия в импульсах орбит ведущего и ведомого спутников. В работе учитывались эффекты третьего тела [64], J₂-возмущения [65–68] и сопротивление атмосферы [69-71]. Разумеется, что модели, построенные на обыкновенном дифференциальном уравнении, практичные для разработки регуляторов. В данной диссертационной работе для представления динамики группировки спутников в тетраэдральной конфигурации были решены уравнения Седвика-Швайгарда с учетом эффекта J₂.

В статье [72] представлены результаты применения нескольких общих стратегий управления для решения задачи поддержания и маневрирования группировки спутников, наблюдающих за Землей. Эти стандартные методы включают как линейные, так и нелинейные подходы к управлению. Были рассмотрены эффекты различных ограничений, включая фиксированную тягу и нерадиальное ускорение. Различные методы управления группировкой архитектуры «лидер-последователь» были описаны. Полученные результаты сравниваются для простого маневра с аномальным смещением, при этом оптимальный по времени маневр с непрерывной тягой используется в качестве базовой линии для сравнения. Поскольку относительная система двух тел для эллиптических орбит является изменяющейся во времени и сильно связанной, в [73] в основном изучается использование нечеткого регулятора для управления движением группировки. В нечетком управлении ошибки относительного положения и скорости рассматриваются как нечеткие, а эффект связи учитывается при определении нечетких правил. В статье [74] основанной на уравнениях Хилла, применяется методика управления с малой тягой в сочетании с нечеткой теорией. Для нечеткого контроллера ошибки относительного положения, скорости и ускорения использовались в качестве нечетких входных переменных.

В исследовании [75] рассматривается задача разработки робастного контроллера для группировки спутников, чья динамика включает в себя нелинейности и неопределенности. Для этой группы спутников предлагается контроллер управления группировкой спутников, включающий в себя контроллер положения для формирования желаемой точной структуры и контроллер ориентации для выравнивания ориентации спутников.

В данной работе задача сохранения конфигурации группировки спутников, представляющих собой оптические компоненты телескопа является приоритетной. На качественные характеристики телескопа, в частности, разрешающую способность и функцию рассеяния точки (ФРТ) телескопа, а также качество получаемого с его помощью изображения, большое влияние оказывает взаимное расположение основных оптических элементов телескопа. В данной диссертационной работе задача сохранения конфигурации группировки спутников, которая служит оптическими компонентами телескопа является приоритетной. Качество получаемого изображения поверхности Земли значительно зависит от точности взаимного

позиционирования спутников в группировке. В свою очередь, данная задача приводит к созданию системы управления для сохранения заданной конфигурации группировки спутников со сверхвысокой точностью. В [44] и [46] утверждается, что для разработки такого рода телескопа требуется точность позиционирования его оптических компонентов достигала $1/10$ длины волны наблюдения. Высокоточное управление было достигнуто с помощью двухступенчатых приводов, состоящих из пьезоактюаторов и подруливающих устройств. [44]. В этой работе рассматривается телескоп, в котором установлены зеркала и обладает микрометровой точностью позиционирования. Главной задачей при разработке системы управления группировкой является поддержание конфигурации группировки с микронной точностью. В том числе, ошибка в относительном положении зеркальных спутников в группировке конфигурации тетраэдра необходима быть в пределах от 0,1 до 1 мкм. Для достижения таких значений применяются методы управления, такие как корневой метод (RLM), метод размещения полюсов в областях LMI, LQR, H_2 оптимальное управление, H_∞ оптимальное управление и комбинированные методы H_2/H_∞ .

Цель работы: Построение математической модели движения группировки спутников малого кластера на геостационарной орбите с учетом возмущений, а также разработка алгоритмов управления движением группировки для сохранения ее конфигурации. В работе решаются следующие задачи:

1. построение математической модели движения группировки спутников с учетом возмущений возникающих из-за несферичности Земли, а также лунно-солнечных возмущений;
2. разработка системы управления движением группировки спутников на геостационарной орбите на основе линейных и нелинейных методов:
 - на основе корневого метода (RLM) и линейно-квадратичного регулятора (LQR)
 - на основе метода размещения полюсов в LMI областях, LQR и линейного H_2 управления
 - основанных на робастных алгоритмах управления такие как H_2 и H_∞ .

Методы исследования:

- фундаментальные законы теоретической и небесной механики;
- апробированные аналитические и численные методы теории линейных дифференциальных и алгебраических матричных уравнений;
- применение известных апробированных методов теории управления, теории колебаний и устойчивости движения, теории высшей алгебры;
- численные методы высокой точности предназначенные для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Научная новизна работы. В данной работе было получено решение математической модели относительного движения группировки спутников апробированными аналитическими и численными методами теории дифференциальных уравнений, позволяющую исследовать динамику

взаимосвязанных движений космических аппаратов при наличии возмущений характерные для высоких и геостационарных орбит. Математическая модель строилась относительно невозмущенных орбит, соответствующие моделям Хилла-Клохесси-Уилтшера и Лоудена. Учитывались возмущения типа неоднородного поля притяжения Земли, согласно модели Сэдваика-Швайгарда, притяжения Луны и Солнца, и давления Солнечных лучей. Система управления и подбор управляющих коэффициентов были построены на основе таких методов как линейно-квадратичный регулятор, метод размещения корней, линейное H_2 управление, робастные алгоритмы управления такие как H_2 и H_∞ .

Научные положения, выносимые на защиту:

- математическая модель движения группировки спутников на геостационарной орбите, учитывающий возмущения высоких орбит;

- алгоритмы управления конфигурацией группировки в случае невозмущенной опорной орбиты на основе корневого метода (RLM) и линейно-квадратичного регулятора (LQR).

- алгоритмы управления конфигурацией группировки спутников с учетом основных возмущающих сил, в случае невозмущенной опорной орбиты на основе применения метода размещения полюсов в LMI областях, линейно-квадратичного регулятора (LQR) и линейного H_2 управления.

- алгоритм управления обеспечивающая сохранение конфигурации группировки в случае возмущенной опорной орбиты и неопределенностей разного рода, основанных на робастных алгоритмах управления такие как H_2 и H_∞ .

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы. При построении математической модели движения спутников относительно невозмущенной опорной орбиты использовались фундаментальные законы теоретической и небесной механики. Были получены модели Хилла-Клохесси-Уилтшера для геостационарных орбит, учитывающие дополнительные возмущения характерные высоким орбитам, в частном случае вырождающиеся в модель Сэдваика-Швайгарда. Для нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений движения используются методы усреднения и классические методы теории дифференциальных уравнений. Подбор управляющих коэффициентов был осуществлен линейно-квадратичным регулятором, путем численного решения нелинейных алгебраических матричных уравнений Риккати.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Задачи дистанционного зондирования Земли приобретают все большее значение для экономики любой страны, так как они позволяют следить за состоянием сельского хозяйства, изменениями природных процессов, паводками, пожарами и другими природными катастрофами. Размещение спутников ДЗЗ на геостационарной орбите дает возможность наблюдать за большими участками земной поверхности в реальном времени.

Исследователи ведущих космических держав все больше фокусируются на разработке систем управления спутниковыми группировками, выполняющими различные миссии. Эти системы охватывают широкий спектр задач, которые не могут быть решены с помощью одного спутника.

Результаты этих исследований служат научной базой для улучшения изучения динамики спутниковых группировок и теории управления, что позволяет решать широкий спектр задач от геоинформатики до астрофизики. Теоретическая и практическая значимость этих результатов заключается в создании высокоточных алгоритмов управления, которые обеспечивают поддержание необходимой конфигурации группировки. Эти алгоритмы не имеют аналогов в мире, поскольку до сих пор группировки на геостационарной орбите не размещались.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Данная работа выполнена в рамках проекта программы грантового финансирования прикладных исследований по приоритету информационные, коммуникационные и космические технологии «Проектирование системы управления движением группировки спутников для дистанционного зондирования Земли» (2018-2020гг., AP05132939) и «Разработка системы управления для сохранения конфигурации группировки космических аппаратов с учетом неопределенностей» (2021-2023 гг., AP09260469).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались:

- на факультете аэронавтики и космонавтики Токийского университета (Япония) под руководством профессора Ш. Накасука (онлайн);
- в 11-ом наноспутниковом симпозиуме. г. Стамбул, Турция. 17-21 октября 2022 года;
- на конференции «AIETE 2024» которая прошла 28-29 февраля 2024 г. в Международном инженерно-технологическом университете;
- Во втором Международном Джолдасбековском Симпозиуме «МЕХАНИКА БУДУЩЕГО» 1-5 марта 2021 года, Алматы;
- на семинарах по направлению «Космическая техника и технологии» кафедры механики КазНУ им. аль-Фараби под руководством профессора З.Б. Ракишевой;

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 12 печатных работ, из них 4 в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных КОКСНВО МНВО РК, 3 в научных журналах индексируемых базой данных Scopus, 3 в материалах международной конференции и симпозиумов, 1 в монографии.

Личный вклад автора. Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из содержания, обозначений и сокращений, введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников. Работа изложена на 73 страницах, содержит 43 иллюстрации, 5 таблиц.

Основное содержание диссертации. Во введении освещены такие вопросы, как актуальность темы диссертационного исследования, основная

цель работы, объект, предмет и методы исследования, научная новизна, научно-практическая значимость диссертационной работы.

Во введении описывается современное состояние исследуемой проблемы и дается обзор работ и литературы в области развития систем управления движением группировки спутников.

В первом разделе описывается создание математической модели движения спутниковой группировки в условиях невозмущенной опорной орбиты. Проведено исследование неуправляемого движения спутников в этой группировке. Разработаны алгоритмы управления конфигурацией группировки для невозмущенной опорной орбиты с использованием корневого метода (RLM) и линейно-квадратичного регулятора (LQR).

Во втором разделе представлена математическая модель движения спутниковой группировки на невозмущенной опорной орбите с учетом основных возмущающих сил, таких как гравитационное влияние Земли, Луны и Солнца. Рассматривается задача синтеза системы управления, которая сохраняет геометрическую конфигурацию группировки в форме тетраэдра. Разработаны алгоритмы управления конфигурацией спутников с учетом основных возмущающих сил, используя метод размещения полюсов в LMI-областях, метод оптимального управления на основе минимизации квадратичного критерия качества, и метод квазиоптимального управления на основе минимизации нормы H_2 передаточной функции системы управления.

В третьем разделе представлена математическая модель движения спутниковой группировки относительно возмущенной опорной орбиты, основанная на модификации модели Лоудена-Седвика-Швайгарда. Составлены уравнения возмущенного движения спутниковой группировки с учетом возмущений, вызванных неоднородностью гравитационного поля Земли, притяжением Луны и Солнца, а также давлением солнечного света. Проведено численное решение линеаризованных нелинейных уравнений движения группировки относительно возмущенной орбиты с использованием методов Рунге-Кутты-Фельберга с переменным шагом интегрирования и алгоритмов Пуллкинена, Фландерна и Стэндиша.

В заключении приведены основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

Благодарность. Автор выражает благодарность отечественному научному консультанту к.ф.-м.н., доценту Ракишевой Зауре Баяновне за научное руководство, неоценимую помощь и научную поддержку на всех этапах выполнения диссертационной работы и зарубежному научному консультанту PhD, профессору Шиничи Накасука за поддержку, плодотворную работу и теплый прием во время научных стажировок (The University of Tokyo, Japan).

1. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВ В СЛУЧАЕ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ

1.1 Разработка математической модели движения группировки спутников в случае невозмущенной опорной орбиты

Для вывода дифференциальных уравнений движения одного спутника в группировке относительно опорного спутника, находящегося на опорной орбите. Следовательно спутник, движение которого изучается относительно опорного спутника определим как B , а опорный спутник определим как A . Для этого вводятся системы координат соответствующие рисунку 1.1 [76]: пусть $OXYZ$ – это инерциальная система координат, центр которой находится в центре масс Земли, ось OZ направлен вдоль оси вращения Земли, ось OX направлена в точку Весеннего равноденствия эпохи J2000, а $Axuz$ – орбитальная система координат, центр которой находится в опорном спутнике, ось Ax направлена вдоль радиус-вектора опорного спутника от центра Земли, ось Az — по нормали к плоскости орбиты в направлении орбитального момента, ось Au дополняет систему до правой тройки.

Следует отметить, что оси орбитальной системы координат могут быть определены различными способами. В частности:

- Ось Az направлена по радиус-вектору от центра Земли к опорному спутнику;
- Ось Ax направлена вдоль вектора скорости движения опорного спутника по орбите;
- Ось Au дополняет систему до правой тройки, будучи перпендикулярной к плоскости орбиты.

Такая система координат называется LVLH (Local Vertical Local Horizontal). Эта система координат удобна для описания движения спутников, так как она естественно связывает положение и движение спутников с их орбитальной динамикой.

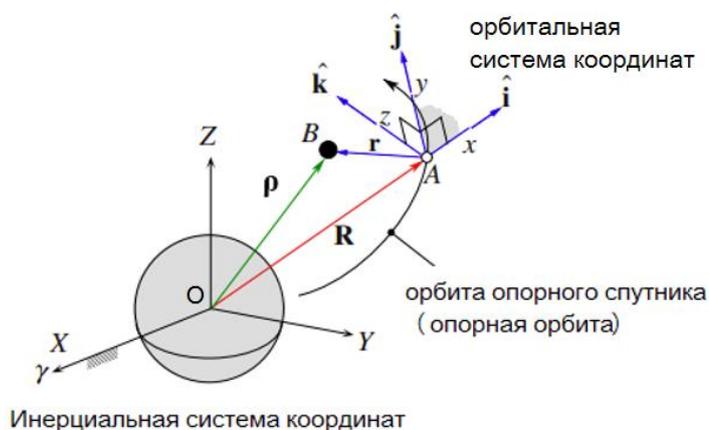


Рисунок 1.1 – Системы координат для описания относительного движения спутников

Соотношение которое показывает, что радиус-вектор спутника В относительно спутника А представляет собой разницу между радиус-вектором спутника А в инерциальной системе координат и радиус-вектором опорного спутника А имеет вид:

$$\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}. \quad (1.1)$$

Уравнения движения спутника В относительно инерциальной системы координат могут быть записаны в следующем виде:

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\mu \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}. \quad (1.2)$$

Учитывая (1.1) и (1.2), получим:

$$\ddot{\vec{r}} = -\ddot{\vec{R}} - \mu \frac{\vec{R} + \vec{r}}{\rho^3}. \quad (1.3)$$

Для упрощения уравнения (1.3) зная что \vec{r} является малым по отношению к \vec{R} и $\vec{\rho}$, к тому же:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = (\vec{R} + \vec{r}) \cdot (\vec{R} + \vec{r}) = \vec{R} \cdot \vec{R} + 2\vec{R} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r} \\ &= R^2 \left(1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$

и учитывая $\frac{r}{R} \ll 1$, то

$$\rho^2 = R^2 \left(1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)$$

Поскольку $\rho^{-3} = (\rho^2)^{-\frac{3}{2}}$, то

$$\rho^{-3} = R^{-3} \left(1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

Применим свойства разложения степенной функции в ряд. Это даст нам:

$$\rho^{-3} = R^{-3} \left(1 + \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) = R^{-3} \left(1 - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) = \frac{1}{R^3} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^5}$$

Учитывая (1.3), получим:

$$\ddot{\vec{r}} = -\ddot{\vec{R}} - \mu \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^5} \right) (\vec{R} + \vec{r})$$

Далее преобразовывая и пренебрегая членами высшего порядка малости, имеем:

$$\ddot{\vec{r}} = -\ddot{\vec{R}} - \mu \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\mu}{R^3} \left(\vec{r} - \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{r})\vec{R}}{R^2} \right) \quad (1.4)$$

Принимая во внимание уравнения опорного спутника относительно ИСК:

$$\ddot{\vec{R}} = -\mu \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (1.5)$$

(1.4) будет записан в виде:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left(\vec{r} - \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{r})\vec{R}}{R^2} \right) \quad (1.6)$$

Спроецируем выведенное уравнение на опорную орбитальную систему координат. В ОСК радиус-векторы спутников А и В имеют вид: $\vec{R} = R\vec{i}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Подставляя это в (1.6), получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= -\frac{\mu}{R^3} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} - \frac{3}{R^2} (R\vec{i} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})) R\vec{i} \right) \\ &= -\frac{\mu}{R^3} (-2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отметим, что ускорение $\ddot{\vec{r}}$ записывается относительно ИСК. Ускорение спутника В в ОСК имеет вид:

$$\overrightarrow{\ddot{r}_{rel}} = \ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{rel}} \quad (1.8)$$

Давайте вспомним, что кинетический момент спутника А направлен перпендикулярно к плоскости его орбиты и может быть определен как вектор $\vec{h} = \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$, который ориентирован вдоль оси z ОСК, т.е. $\vec{h} = h\vec{k}$. Таким образом, угловая скорость и ее производная по времени могут быть вычислены следующим образом:

$$\vec{\Omega} = \frac{h}{R^2} \vec{k}, \vec{\dot{\Omega}} = -\frac{2(\vec{V} \cdot \vec{R})h}{R^4} \vec{k}, \quad (1.9)$$

где $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$.

Учитывая также $\vec{v}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, подставляя полученное соотношение вместе с уравнениями (1.9), (1.7) в (1.8), получим:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{rel}^{\ddot{}} = & -\frac{\mu}{R^3} (-2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - \frac{2(\vec{V} \cdot \vec{R})h}{R^4} (y\vec{i} - x\vec{j}) \\ & - \left(-\frac{h^2}{R^4} (x\vec{i} + y\vec{j}) \right) - 2\frac{h}{R^2} (\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зная, что $\vec{r}_{rel}^{\ddot{}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, уравнение (1.10) в векторной форме будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = & \left[\left(\frac{2\mu}{R^3} + \frac{h^2}{R^4} \right) x - \frac{2(\vec{V} \cdot \vec{R})h}{R^4} y + 2\frac{h}{R^2} \dot{y} \right] \vec{i} + \\ & \left[-\left(\frac{\mu}{R^3} - \frac{h^2}{R^4} \right) y - \frac{2(\vec{V} \cdot \vec{R})h}{R^4} x - 2\frac{h}{R^2} \dot{x} \right] \vec{j} - \frac{\mu}{R^3} z\vec{k} \end{aligned} \quad (1.11)$$

В скалярном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \left(\frac{2\mu}{R^3} + \frac{h^2}{R^4} \right) x - \frac{2(\vec{V} \cdot \vec{R})h}{R^4} y + 2\frac{h}{R^2} \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \left(\frac{\mu}{R^3} - \frac{h^2}{R^4} \right) y - \frac{2(\vec{V} \cdot \vec{R})h}{R^4} x - 2\frac{h}{R^2} \dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{R^3} z &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) описывают относительное движение спутников в группировке. Когда опорный спутник движется по эллиптической орбите, векторы \vec{V} и \vec{R} становятся функциями времени. В таком случае уравнения (1.12) становятся нелинейными и должны решаться вместе с уравнениями (1.5). Эта система уравнений называется уравнениями Лоудена [77].

Если опорная орбита является круговой, то $\vec{V} \cdot \vec{R} = 0$ и $h = \sqrt{\mu R}$, тогда выражение (1.12) записывается [78]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \frac{3\mu}{R^3} x - 2\sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + 2\sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \dot{x} &= 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\ddot{z} + \frac{\mu}{R^3} z = 0.$$

Учитывая, что для круговых орбит среднее движение или частота обращения ОСК вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты

Принимая во внимание, что для круговых орбит среднее движение равно $n = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}$, то соотношения (1.13) определяются как:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - n^2 x - 2n\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2 z &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Уравнения (1.14) являются линейными дифференциальными уравнениями относительного движения спутников в группировке в случае невозмущенной круговой опорной орбиты и называются уравнениями Хилла–Клохесси–Уилтшера.

Если оси орбитальной системы координат определены следующим образом: ось Az направлена вдоль радиус-вектора, ось Ax совпадает с направлением движения опорного спутника по его орбите, а ось Ay дополняет систему до правой тройки координат, то соотношения (1.14) будут иметь вид [62]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{z} &= 0, \\ \ddot{y} + n^2 y &= 0, \\ \ddot{z} - 2n\dot{x} - 3n^2 z &= 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

В данной диссертационной работе основное внимание уделяется созданию системы управления для группировки спутников, находящихся на геостационарной орбите. Данная группировка состоит из 4-х спутников, которые формируют тетраэдральную конфигурацию. В этой конфигурации опорный спутник размещается на вершине тетраэдра, а остальные 3 спутника располагаются в плоскости основания тетраэдра. Опорный спутник движется по опорной орбите (Рисунок 1.2).

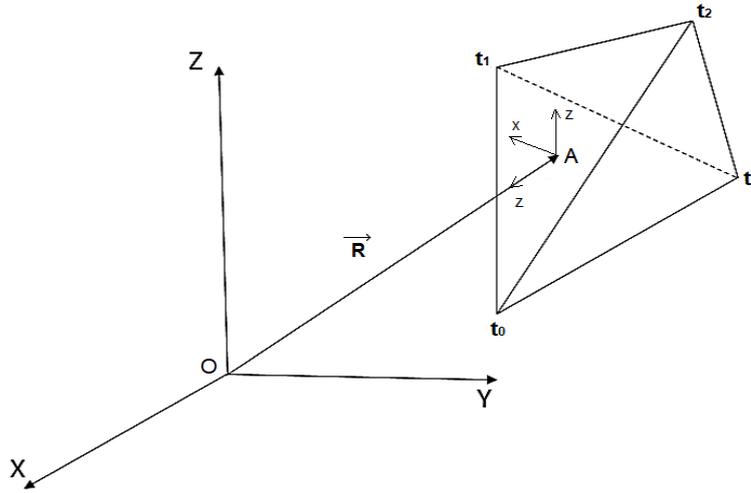


Рисунок 1.2 – Тетраэдральная группировка спутников

Основной задачей системы управления группировкой является поддержание конфигурации группировки в соответствии с миссией. Для определения степени отклонения текущей конфигурации от необходимого тетраэдра мы опираемся на математические модели, которые применяются для вычисления объема тетраэдра. Это позволяет нам количественно оценить и контролировать форму и расположение спутников в группировке.

Объема тетраэдра с вершинами $\vec{t}_0 = [x_0, y_0, z_0]$, $\vec{t}_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{t}_2 = [x_2, y_2, z_2]$, $\vec{t}_3 = [x_3, y_3, z_3]$, заданными относительно системы координат с началом в геометрическом центре тетраэдра, можно определить по формуле [79]:

$$V_T = \frac{1}{6} \det |\vec{t}_1 - \vec{t}_0, \vec{t}_2 - \vec{t}_0, \vec{t}_3 - \vec{t}_0|. \quad (1.16)$$

1.2 Построение алгоритмов управления конфигурацией группировки в случае невозмущенной опорной орбиты

В данном исследовании предполагаем, что управляющее воздействие является линейной функцией.:

$$\begin{aligned} u_x &= -k_x(x_T - x) - k_{Vx}V_x, \\ u_y &= -k_y(y_T - y) - k_{Vy}V_y, \\ u_z &= -k_z(z_T - z) - k_{Vz}V_z, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где x_T, y_T, z_T – требуемое положение спутника в группировке, v_x, v_y, v_z – относительная скорость спутников в группировке. $k_x, k_{Vx}, k_y, k_{Vy}, k_z, k_{Vz}$ – постоянные коэффициенты, которых необходимо определить.

Для вычисления коэффициентов $k_x, k_{Vx}, k_y, k_{Vy}, k_z, k_{Vz}$ применяем метод размещения корней характеристического уравнения (RLM).

Уравнения управляемого движения спутника в группировке будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - n^2x - 2n\dot{y} &= u_x, \\ \dot{y} + 2n\dot{x} &= u_y, \\ \ddot{z} + n^2z &= u_z.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Из уравнения (1.18) заметно, что третье уравнение системы не зависит от переменных, присутствующих в первом и во втором уравнениях. Поэтому его будем рассматривать отдельно. Для этого решение будем искать в следующем виде:

$$z = Ce^{\lambda t}.\tag{1.19}$$

Из этого рассуждения мы можем найти соответствующие значения \dot{z} , \ddot{z} и затем подставить их во второе уравнение системы (1.18). После необходимых преобразований наше выражение будет иметь вид:

$$C(\lambda^2 + k_{Vz}\lambda + n^2 + k_z) = 0.\tag{1.20}$$

Очевидно, что уравнение (1.20) является полиномом второй степени и имеет вид:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Для первого и второго уравнений системы (1.18) решение будем искать в следующем виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}.\tag{1.21}$$

Найдем соответствующие производные по времени из этого выражения и подставим их в соотношение системы (1.18). После выполнения необходимых преобразований мы получим:

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 - k_{Vx}\lambda + k_x) - 2nB\lambda &= 0, \\ B(\lambda^2 + k_{Vy}\lambda + k_y) + 2nA\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Поскольку система уравнений (1.22) должна иметь ненулевое решение для A и C, определитель этой системы будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - k_{Vx}\lambda + k_x & -2n\lambda \\ 2n\lambda & \lambda^2 + k_{Vy}\lambda + k_y \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

или

$$\lambda^4 + \lambda^3(k_{Vy} + k_{Vx}) + \lambda^2(k_x - k_{Vx}k_{Vy}) + \lambda(k_xk_{Vy} - k_{Vx}k_y + k_xk_y) = 0 \quad (2.24)$$

Уравнение (1.24) является характеристическим уравнением с видом:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (1.25)$$

Необходимые корни характеристического уравнения второго порядка будут определяться как корни полинома вида:

$$\lambda^2 + 1.414\Omega\lambda + \Omega^2 = 0, \quad (1.26)$$

где $\Omega = \frac{t_n}{t_p}$, t_n – нормированное время переходного процесса, t_p – реальное время переходного процесса.

А корни характеристического уравнения четвертого порядка как корни полинома вида:

$$\lambda^4 + 2.613\Omega\lambda^3 + 3.4141\Omega^2\lambda^2 + 2.613\Omega^3\lambda + \Omega^4 = 0. \quad (1.27)$$

Далее учитывая (1.20) и (1.26), получим уравнение, определяющее коэффициентов обратной связи:

$$\begin{aligned} k_{Vz} &= 1.414\Omega, \\ k_z &= \Omega^2 - n^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Учитывая (1.24) и (1.27), получим систему уравнений определяющая коэффициентов обратной связи:

$$\begin{aligned} k_{Vy} - k_{Vx} &= 2.613\Omega, \\ k_x - k_{Vx}k_{Vy} &= 3.414\Omega^2, \\ k_xk_{Vy} - k_{Vx}k_y &= 2.613\Omega^3, \\ k_xk_y &= \Omega^4. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Учитывая параметры невозмущенной опорной орбиты главного спутника, такие как радиус круговой орбиты 42164 км, наклонение $I = 0^\circ$ мы получаем:

$$n = 0.00007293976184, \quad (1.30)$$

При заданных параметрах уравнения (1.30) и решая уравнения (1.28) и (1.29) методом размещения корней (RLM) были получены следующие значения коэффициентов обратной связи:

$$\begin{aligned}
k_x &= 0.999999996453073, \\
k_{V_x} &= 1.732050805521058, \\
k_y &= 0.999999994679244, \\
k_{V_y} &= 1.732050804496938, \\
k_z &= 1.000000012414609, \\
k_{V_z} &= 1.732050814736453.
\end{aligned}
\tag{1.31}$$

Для определения управляющего ускорения с обратной связью $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ в уравнениях движения (1.18), обеспечивающего движение спутника на определенном расстоянии от центра группировки, было принято решение использовать линейно-квадратичный регулятор, который получается путем минимизации критерия качества в следующем виде [80]:

$$J = \frac{1}{2} \int (\overline{\Delta r}^T Q \overline{\Delta r} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt,
\tag{1.32}$$

где $\overline{\Delta r} = [x_T - x, y_T - y, z_T - z]$, Q, R – положительные матрицы с постоянными компонентами, x_T, y_T, z_T – требуемое положение спутника в группировке.

Линейный квадратичный критерий качества может применяться для линейных систем представленных в следующем виде:

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{u},
\tag{1.33}$$

где \vec{X} – вектор состояния, A – матрица системы, B – матрица управления. Уравнения (1.18) можно привести к виду (1.33):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= V_x, \dot{y} = V_y, \dot{z} = V_z, \\
\dot{V}_x &= n^2 x + 2nV_y + u_x,
\end{aligned}
\tag{1.34}$$

$$\dot{V}_y = -2nV_x + u_y,$$

$$\dot{V}_z = -n^2z + u_z.$$

Для выражения (1.34) матрицы А и В определяются как:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

При минимизации критерия качества (1.32) управляющее ускорение $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ будет иметь вид:

$$\vec{u} = -R^{-1}B^T P \vec{\Delta r} = K \vec{\Delta r}, \quad (1.37)$$

где матрица R:

$$R = 0.001 \cdot \text{diag}[1 \ 1 \ 1]. \quad (1.38)$$

Соответственно, матрица Р определяется из соотношения:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (1.39)$$

$$Q = 0.001 \cdot \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]. \quad (1.40)$$

В результате решения выражения (1.39) определена матрица коэффициентов обратной связи с помощью метода LQR:

$$K = [k_x \ 0 \ 0 \ 0 \ k_y \ 0 \ 0 \ 0 \ k_z \ k_{Vx} \ 0 \ 0 \ 0 \ k_{Vy} \ 0 \ 0 \ 0 \ k_{Vz}]. \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} k_x &= 1.4399999999999986, \\ k_{Vx} &= 1.712484599078189, \\ k_y &= 0.707540905463074, \\ k_{Vy} &= 1.420872408915288, \\ k_z &= 0.796060600935517, \\ k_{Vz} &= 1.498642992006525. \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.3 Результаты численного моделирования управляемого движения группировки для обеспечения удержания конфигурации группировки

Для проверки полученных коэффициентов проведем численное решение уравнений (1.18) при следующих начальных условиях, приведенных в таблице 1.1, определяющих расположение четырех спутников относительно их геометрического центра.

Для верификации полученных коэффициентов обратной связи получим численное решение уравнений (1.18) со следующими начальными условиями, описанными в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Начальные условия движения

Начальное положение (м) и скорость (мм/с), по оси X	Начальное положение (м) и скорость (мм/с), по оси Y	Начальное положение (м) и скорость (мм/с), по оси Z
1	2	3
$x_0(t_0) = -\frac{2}{9}\sqrt{6}$	$y_0(t_0) = 0$	$z_0(t_0) = 0$
$x_1(t_0) = \frac{1}{9}\sqrt{6}$	$y_1(t_0) = 0$	$z_1(t_0) = \frac{2}{9}\sqrt{6}$
$x_2(t_0) = \frac{1}{9}\sqrt{6}$	$y_2(t_0) = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$	$z_2(t_0) = -\frac{1}{9}\sqrt{6}$
$x_3(t_0) = \frac{1}{9}\sqrt{6}$	$y_3(t_0) = \frac{1}{6}\sqrt{6}$	$z_3(t_0) = -\frac{1}{9}\sqrt{6}$
$v_{0x}(t_0) = 0$	$v_{0y}(t_0) = -0,0232\pi$	$v_{0z}(t_0) = 0$
$v_{1x}(t_0) = 0,0164\pi$	$v_{1y}(t_0) = 0$	$v_{1z}(t_0) = -0,0164\pi$
$v_{2x}(t_0) = 0$	$v_{2y}(t_0) = 0,0164\pi$	$v_{2z}(t_0) = -0,0164\pi$

$v_{3x}(t_0) = 0$	$v_{3y}(t_0) = 0,0164\pi$	$v_{3z}(t_0) = -0,0164\pi$
-------------------	---------------------------	----------------------------

На рисунках 1.3 – 1.5 представлены результаты численных исследований движения спутников в группировке без управления.

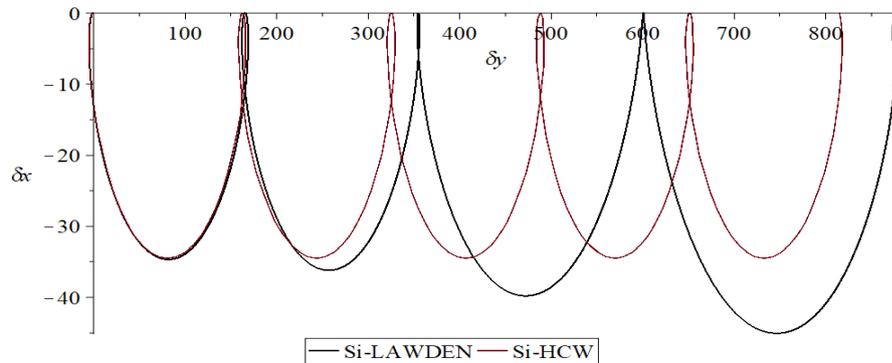


Рисунок 1.3 – Орбита ведомого спутника – плоский случай: невозмущенная опорная орбита – красная кривая (модель Хилла-Клохесси-Уилтшера), эллиптическая опорная орбита – черная кривая (модель Лоудена).

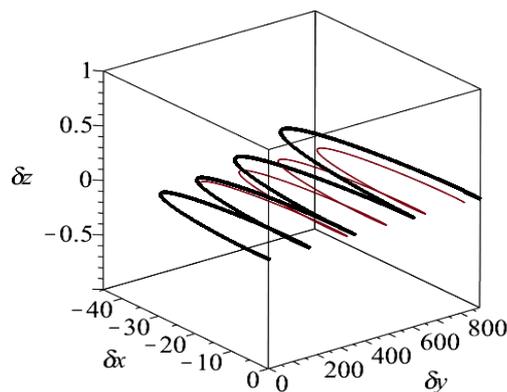


Рисунок 1.4 – Орбита ведомого спутника – пространственный случай: невозмущенная опорная орбита – красная кривая (модель Хилла-Клохесси-Уилтшера), эллиптическая опорная орбита – черная кривая (модель Лоудена).

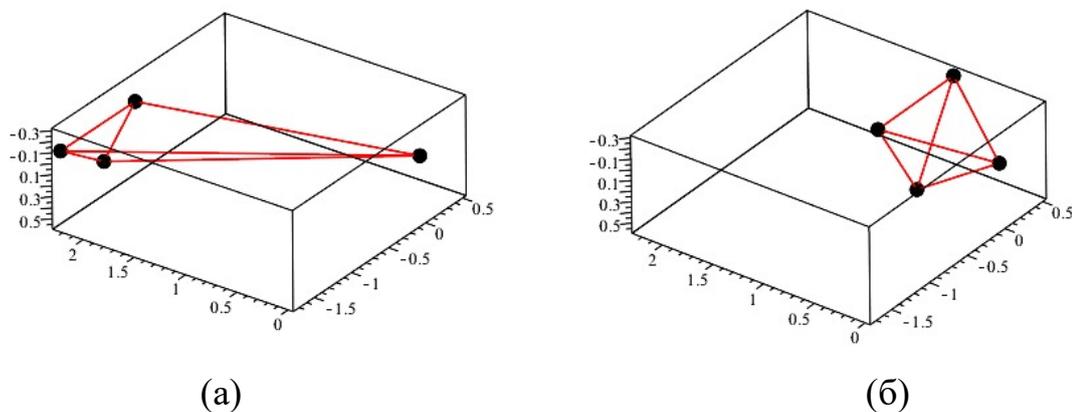


Рисунок 1.5 – Динамика группировки при тетраэдральной конфигураций: (а) – $t = 0$ с, (б) – $t = 1000$ с.

На графиках 1.6 – 1.13 представлены показатели управляемого движения группировки спутников. В качестве требуемого положения спутников в группировке, обозначенного как x_T, y_T, z_T , были заданы начальные условия, перечисленные в таблице 1.1. Таким образом, решается задача поддержания группировки в начальной конфигурации. На представленных графиках показаны изменения объема конфигурации и взаимные расстояния между спутниками при использовании двух методов управления: RLM и LQR, на одном и том же временном интервале.

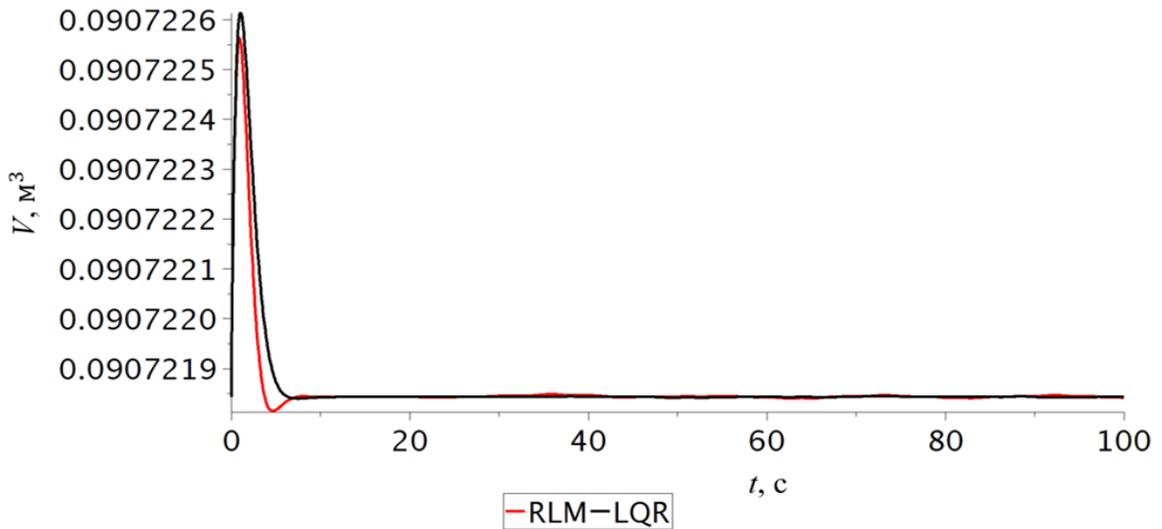


Рисунок 1.6 – Изменение объема группировки за 100 сек при управлении

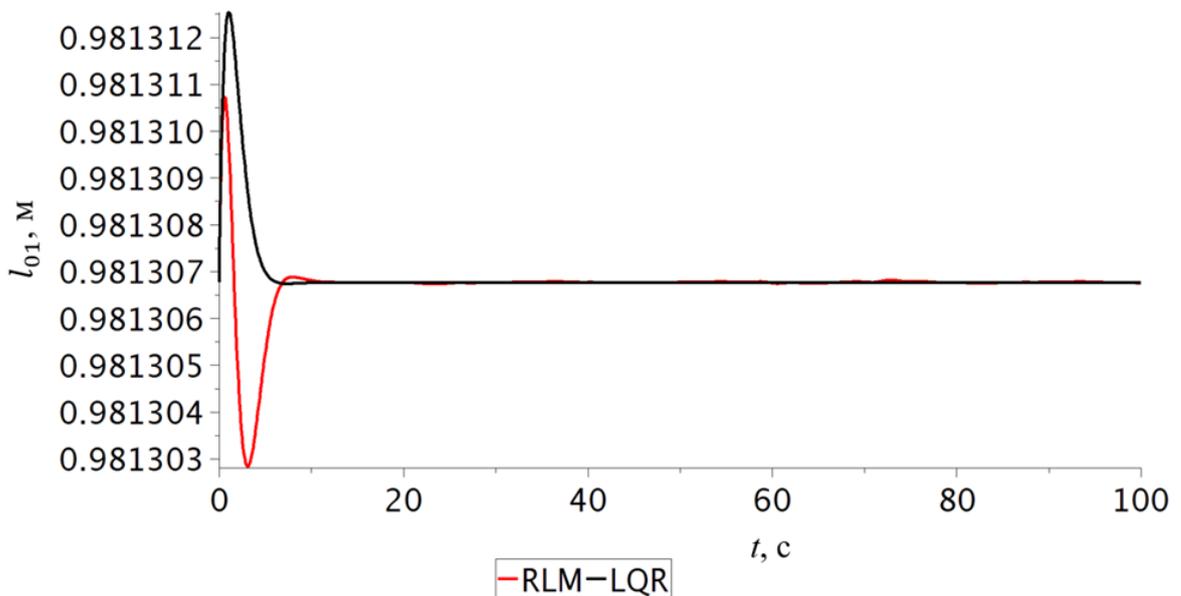


Рисунок 1.7 – Изменение расстояния между спутниками S_0 и S_1 за 100 сек при управлении

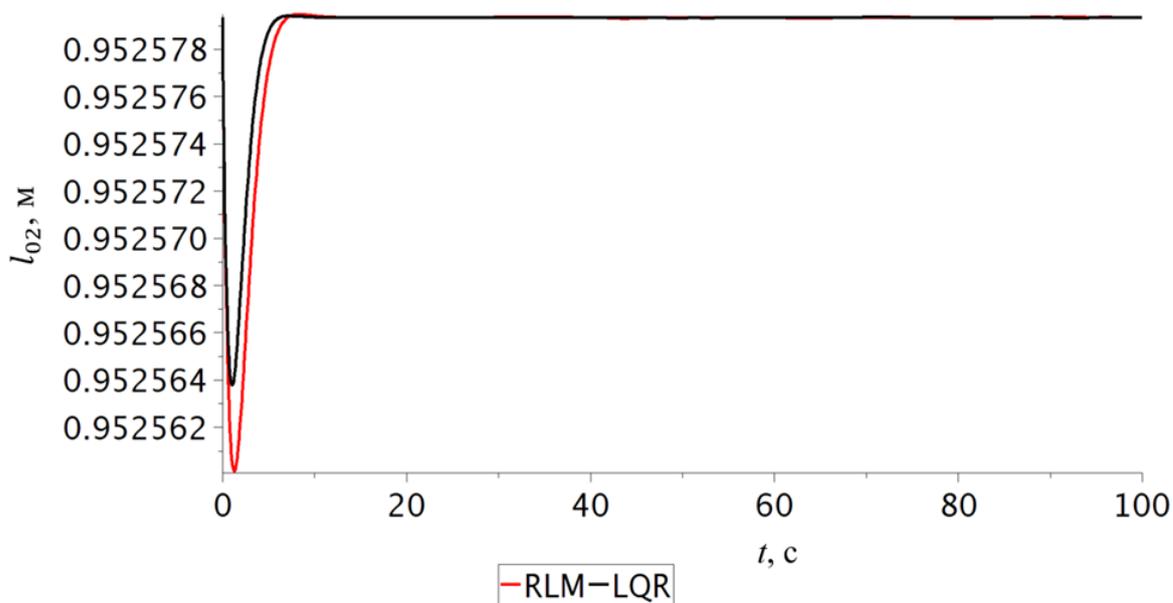


Рисунок 1.8 – Изменение расстояния между спутниками S_0 и S_2 за 100 сек при управлении

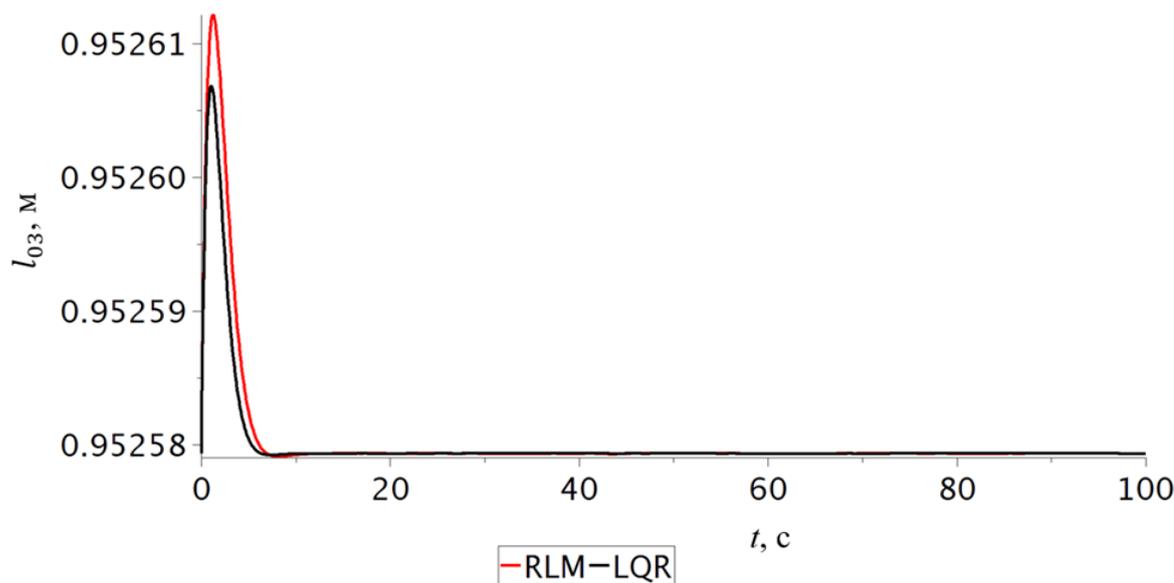


Рисунок 1.9 – Изменение расстояния между спутниками S_0 и S_3 за 100 сек при управлении

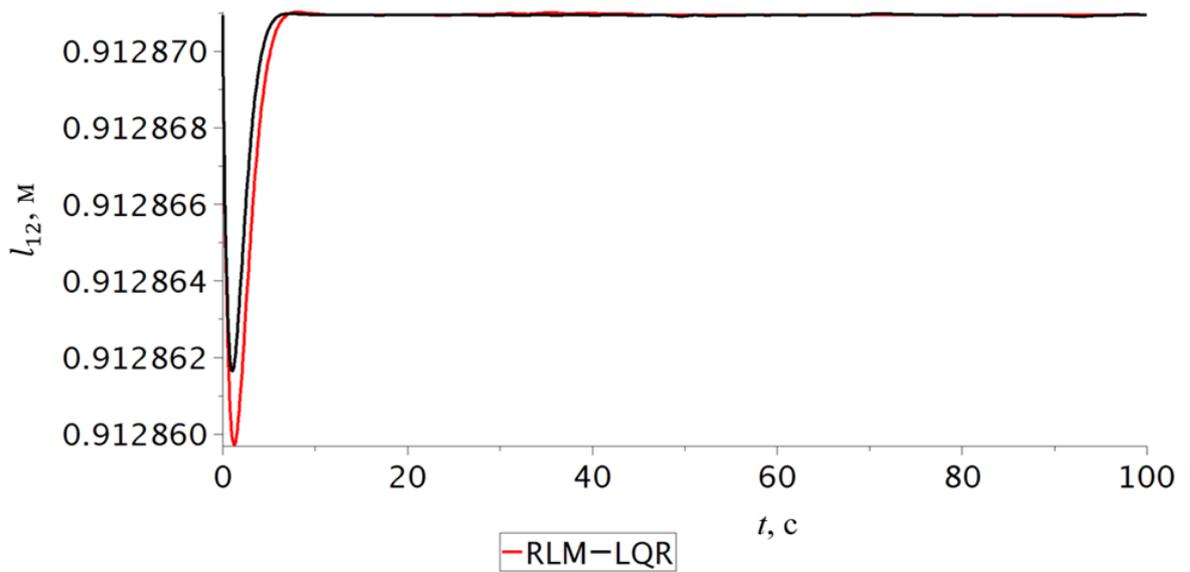


Рисунок 1.10 – Изменение расстояния между спутниками S_1 и S_2 за 100 сек при управлении

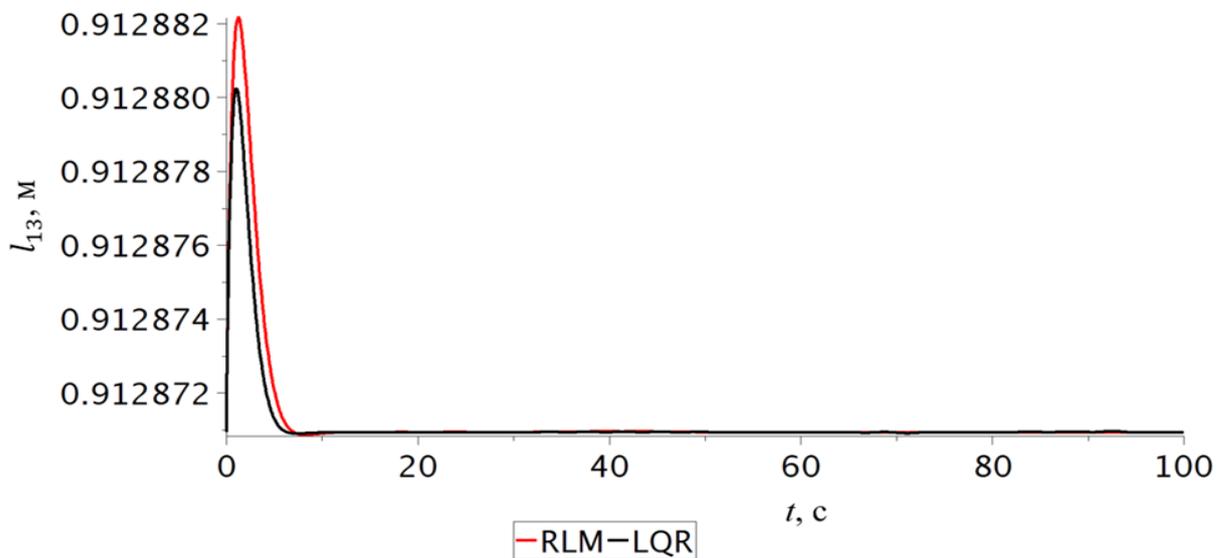


Рисунок 1.11 – Изменение расстояния между спутниками S_1 и S_3 за 100 сек при управлении

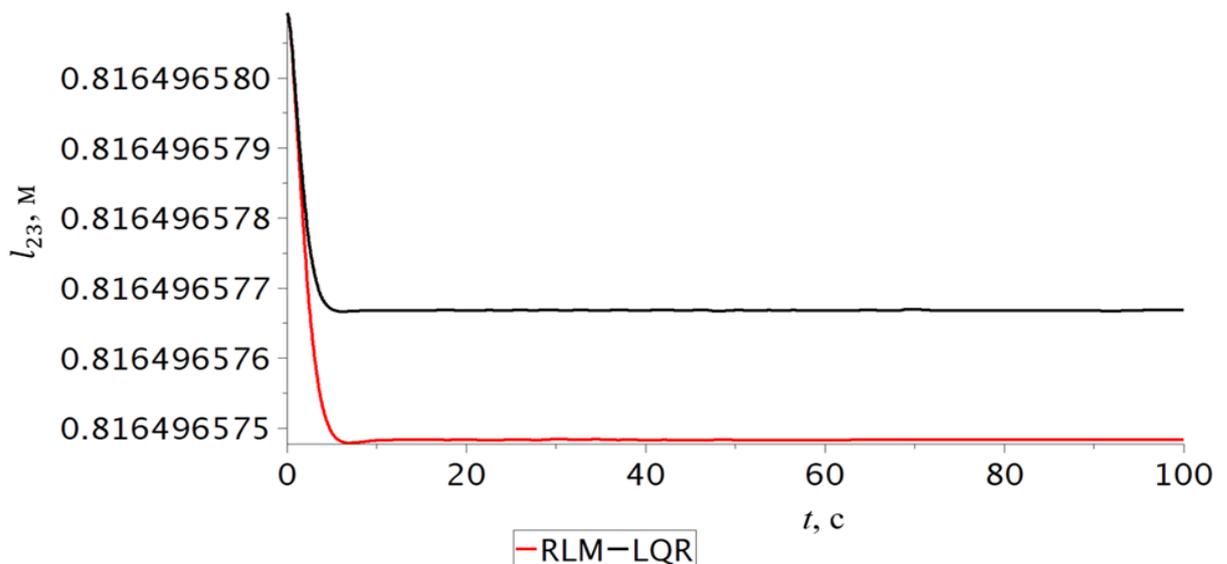


Рисунок 1.12 – Изменение расстояния между спутниками S_3 и S_2 за 100 сек при управлении

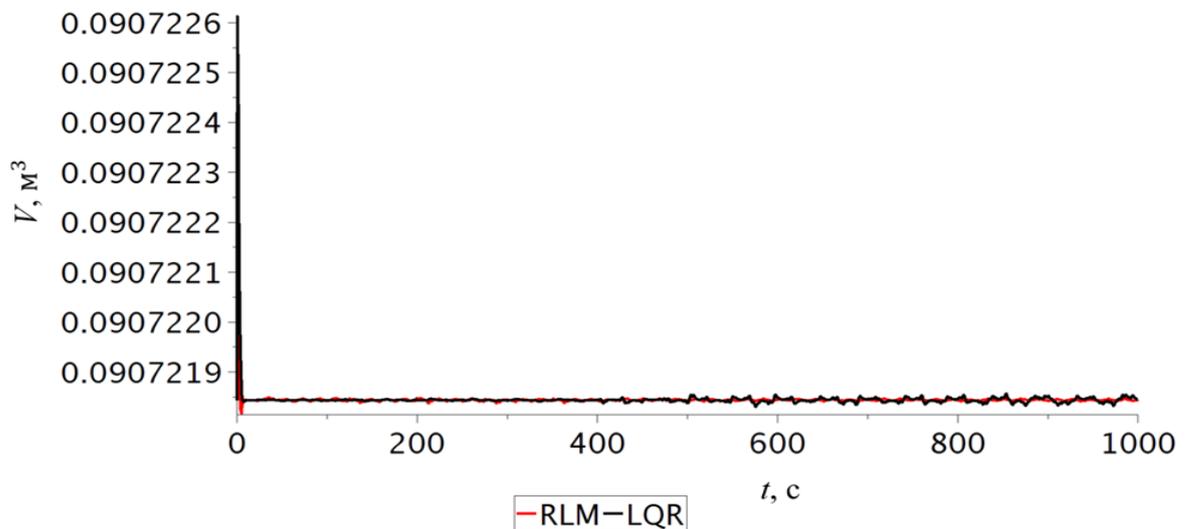


Рисунок 1.13 – Изменение объема группировки за 1000 сек при управлении

В иллюстрациях 1.3–1.5 отражены изменение орбиты и конфигурации группировки. Следовательно стало понятно, что воздействие центрального гравитационного поля вызывает гармонические колебания. Из рисунка 1.5 видно, что группировка быстро теряет свою устойчивость, что подчеркивает необходимость применения определенных алгоритмов управления.

Рисунки 1.6–1.12, демонстрирующие изменения объема тетраэдра и расстояния между спутниками в группировке, показывает, что при использовании управления начальная конфигурация сохраняется в течение всего промежутка заданного времени. Кроме того, наблюдается, что использование управления на основе LQR позволяет достичь требуемого положения спутников в конфигурации с меньшим перерегулированием по сравнению с RLM.

Из рисунка 1.13, где показано изменение объема группировки на протяжении длительного временного интервала, можно заключить, что

созданные алгоритмы управления движением спутников в группировке обеспечивают сохранение тетраэдральной конфигурации в течение продолжительного времени.

Исходя из этого, в ходе исследований было выявлено, что созданного математического аппарата управления движением спутников в группировке можно успешно применить для контроля расстояния спутников на геостационарных орбитах при выборе соответствующих начальных условий.

2. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВ В СЛУЧАЕ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ С УЧЕТОМ ОСНОВНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

2.1 Разработка математической модели движения группировки спутников в случае невозмущенной опорной орбиты с учетом основных возмущающих сил

В данном разделе рассматривается тетраэдральная группировка на геостационарной орбите, состоящая из четырёх спутников: спутник S_0 расположен в вершине тетраэдра, его орбита является опорной, спутники S_1 , S_2 , S_3 расположены в основании тетраэдра.

Для описания движения данной группировки на невозмущенной опорной орбите с учетом основных возмущающих сил (рисунок 2.1) введем основные системы координат, где $OXYZ$ – инерциальная система координат (ИСК), центр которой совпадает с центром масс Земли, ось OZ направлена вдоль оси вращения Земли, ось OX направлена в точку весеннего равноденствия, ось OY дополняет систему до правой; S_0xyz – орбитальная система координат (LVLH), центр которой совпадает со спутником S_0 , движущимся по опорной орбите. Ось S_0x направлена вдоль радиус-вектора опорного спутника; ось S_0z перпендикулярна плоскости орбиты и направлена вдоль вектора момента орбиты, ось S_0y дополняет систему до правой.

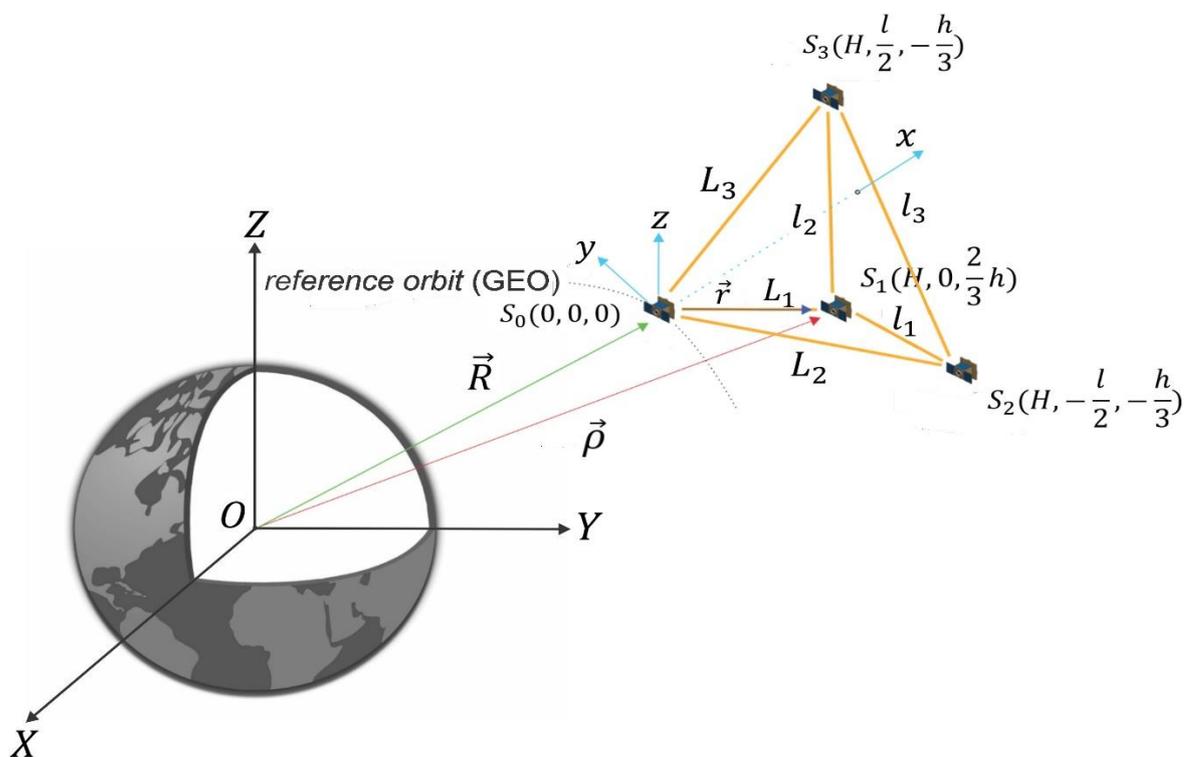


Рисунок 2.1 – Системы координат

Было рассмотрено влияние основных возмущающих сил, содержащие воздействие гармоника J_2 гравитационного потенциала Земли на опорную орбиту, помимо этого влияние гравитационного поля Луны и Солнца [81]. Для этого представим гравитационный потенциал Земли в виде:

$$U_2 = -\frac{1}{2}\mu J_2 \frac{r_E^2}{R^3} (3\sin^2\varphi - 1) + \frac{\mu_j}{r_j} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_j}\right)^n P_n(\cos \psi_j), \quad (2.1)$$

где r_E – радиус Земли, R – радиус-вектор опорного спутника в ИСК, φ – широта опорного спутника в ИСК, μ – гравитационный параметр Земли, $\cos \psi_j = \frac{(\vec{R}, \vec{R}_j)}{RR_j}$ – косинус угла между направлениями из начала координат на j -ое возмущающее тело и КА, \vec{R}_j – радиус вектор возмущающего тела j в ИСК, (здесь и далее в качестве возмущающего тела $j = 2$ рассматривается Луна, а в качестве $j = 3$ рассматривается Солнце), μ_j – гравитационный параметр j -го возмущающего тела, $P_n(\cos \psi_j)$ – полиномы Лежандра.

Данное уравнение можно записать иначе, учитывая, что $\sin \varphi = \sin I \sin u$, где I – наклонение опорного спутника в ИСК, u – аргумент перицентра опорного спутника.

Получим компоненты возмущающей силы, взяв операцию градиента ∇ для описанной выше функции. В результате получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{r_3^2}{R^4} \mu J_2 (3\sin^2 I \sin 2u - 1) + \left(\frac{\mu_2 R}{R_2^3} + \frac{\mu_3 R}{R_3^3} \right) (3\sin^2 I \sin 2u - 1), \\ F_y &= -\frac{r_3^2}{R^4} \mu J_2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I + \frac{3}{2} \sin^2 I \cos 2u \right) \\ &\quad + \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_2 R}{R_2^3} + \frac{\mu_3 R}{R_3^3} \right) R \sin^2 I \cos 2u, \\ F_z &= -\frac{3}{2} \frac{r_3^2}{R^4} \mu J_2 (3 \sin 2I \sin 2u - 1) + \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_2 R}{R_2^3} + \frac{\mu_3 R}{R_3^3} \right) R \sin 2I \sin u. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для применения полученных формул в правой части уравнений движения требуется линеаризовать выражения для вектора гармоника $\vec{J}_2(R)$ и привести их к опорной орбите. Когда отсутствуют внешние воздействия на спутники S_1 , S_2 и S_3 относительно опорного спутника, уравнения движения в векторной форме могут быть представлены следующим образом [33]:

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{g}(R) + \overline{\nabla g}(R) \cdot \vec{r}, \quad (2.3)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус вектор спутника S_i ($i = 1, 2, 3$) относительно опорного спутника, $\vec{\Omega} = \frac{h}{R^2} \vec{k}$, $\dot{\vec{\Omega}} = -\frac{2(\vec{v} \cdot \vec{R})h}{R^4} \vec{k}$,

$$\vec{g}(R) = -\frac{\mu}{r^2}\vec{r}, \nabla\vec{g}(R) = \begin{bmatrix} \frac{2\mu}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{r^3} \end{bmatrix}.$$

При учете воздействия гармоник J_2 и гравитационных сил Луны и Солнца в правой части (3.3) возникает компонент $\vec{F}_{J_2} = \vec{J}_2(R) + \nabla\vec{J}_2(R)$ и $\sum_{j=1}^2 (F_j(\vec{R}) + \nabla F_j(\vec{R})\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} = \\ \vec{g}(R) + \nabla\vec{g}(R) \cdot \vec{r} + \vec{J}_2(R) + \nabla\vec{J}_2(R) \cdot \vec{r} + \sum_{j=1}^2 (F_j(\vec{R}) + \nabla F_j(\vec{R})\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку градиент $\nabla\vec{J}_2(R)$ зависит от широты и, следовательно, от времени, это может привести к изменению коэффициентов в уравнениях движения со временем. Чтобы избежать этой проблемы, в [64] предложили провести усреднение данного компонента:

$$\nabla\vec{J}_2(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla\vec{J}_2(R) du = \frac{\mu}{R^3} \begin{bmatrix} 4s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -3s \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$s = \frac{3J_2 r_E^2}{8R^3} (1 + 3\cos 2I). \quad (2.6)$$

Для того чтобы периоды опорной орбиты и возмущенной орбиты совпадали, были выполнены следующие изменения [64]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla\vec{J}_2(R) du = [-n^2 R s, 0, 0] \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7), (2.2) в (2.4) и учитывая, что [21]:

$$\vec{\Omega} = [0, 0, nc], \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{r_E^3}}, \quad c = \sqrt{1 + s}. \quad (2.8)$$

были получены следующие уравнения движения относительно невозмущенной опорной орбиты, учитывающие возмущающее воздействие, вызванное гармоникой J_2 , а также гравитационным воздействием Луны и Солнца:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i - 2nc\dot{y}_i - (5c^2 - 2)n^2 x_i &= f_x, \\ \ddot{y}_i + 2nc\dot{x}_i &= f_y, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_i + q_i^2 z_i &= 2f_i q_i \cos(q_i t + \varphi) + f_z, \\ q_i &= nc - (\cos \gamma_i \sin \gamma_i \cot \Omega_i - \sin^2 \gamma_i \cos I_{1i})(\dot{\Omega}_{1i} - \dot{\Omega}_{2i}) \\ &\quad - \dot{\Omega}_{1i} \cos I_{1i}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\gamma_i = \cot^{-1} \left(\frac{\cot I_{2i} \sin I_{1i} - \cos I_{1i} \cos \Omega_i}{\sin \Omega_i} \right), \Omega_i = \frac{z_i(t_0)}{R \sin I} \quad (2.11)$$

$$I_{1i} = \frac{v_{iz}(t_0)}{kR} + I_{2i}, I_{2i} \approx I, k = nc + \frac{3nJ_2 r_E^2}{2R^2} \cos^2 I, \quad (2.12)$$

$$\dot{\Omega}_{1i} = -\frac{3nJ_2 r_E^2}{2R^2} \cos I_{1i}, \dot{\Omega}_{2i} = -\frac{3nJ_2 r_E^2}{2R^2} \cos I_{2i},$$

$$f_i = -\frac{\sin I_{1i} \sin I_{2i} \sin \Omega_i}{\sin \Phi_i} (\dot{\Omega}_{1i} - \dot{\Omega}_{2i}) R, \quad (2.13)$$

$$\Phi_i = \cos^{-1}(\cos I_{1i} \cos I_{2i} + \sin I_{1i} \sin I_{2i} \cos \Omega_i), i = 1 \dots 3.$$

$$f_x = \left(\frac{\mu_2 R}{R_2^3} + \frac{\mu_3 R}{R_3^3} \right) (3 \sin^2 I \sin 2u - 1),$$

$$f_y = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_2 R}{R_2^3} + \frac{\mu_3 R}{R_3^3} \right) R \sin^2 I \cos 2u, \quad (2.14)$$

$$f_z = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_2 R}{R_2^3} + \frac{\mu_3 R}{R_3^3} \right) R \sin 2I \sin u.$$

где x, y, z – координаты спутников относительно опорного спутника, I – наклонение орбиты опорного спутника, I_2 – наклонение спутников S_i ($i = 1, 2, 3$), $z_i(t_0)$ – начальное значение координаты z , $v_{iz}(t_0)$ – начальное значение проекции скорости на ось z , R – радиус-вектор опорного спутника в ИСК, i – номер спутников S_1, S_2, S_3 .

2.2 Построение алгоритмов управления конфигурацией группировки спутников с учетом основных возмущающих сил

Главная цель управления группировкой заключается в сохранении ее геометрической конфигурации для выполнения миссии. Это включает в себя сохранение определенного расстояния между спутниками с необходимой точностью.

В этом разделе рассматривается проблема обеспечения точного позиционирования спутников в группировке с точностью до 1.5 микрометра с использованием двигателей на холодном газе в качестве исполнительных механизмов. Для расчета требуемой тяги двигателей было применено линейный метод управления:

$$\begin{aligned} u_x &= -k_x(x_T - x) - k_{Vx}v_x, \\ u_y &= -k_y(y_T - y) - k_{Vy}v_y, \\ u_z &= -k_z(z_T - z) - k_{Vz}v_z, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где x_T, y_T, z_T – требуемые положения спутников в опорной системе координат, v_x, v_y, v_z – скорости спутников в группировке, $k_x, k_{v_x}, k_y, k_{v_y}, k_z, k_{v_z}$ – постоянные коэффициенты обратной связи, подлежащие дальнейшему определению.

Компоненты управляющей силы тяги u_x, u_y, u_z будут применены в правой части уравнения (2.9) с целью обеспечения управляемого движения спутников в группировке относительно опорного.

Для вычисления коэффициентов обратной связи $k_x, k_{v_x}, k_y, k_{v_y}, k_z, k_{v_z}$ рассмотрены следующие подходы:

- 1) метод размещения полюсов в LMI областях;
- 2) линейно-квадратичный регулятор;
- 3) оптимальное H_2 управление.

Область матричного неравенства LMI это выпуклое подмножество комплексной плоскости, определяемое следующим соотношением: [79]:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : L + Mz + M^T \bar{z} < 0\}, \quad (2.16)$$

где $M = \{\mu_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$ и $L = L^T = \{\lambda_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq m}$ являются действительными матрицами с постоянными элементами.

Матричная функция:

$$f_D(z) := L + Mz + M^T \bar{z}, \quad (2.17)$$

называется характеристической функцией D-области.

Часто метод размещения корней в областях матричного неравенства (LMI) дает возможность выявить линейное управление, которое гарантирует устойчивое размещение корней в LMI областях и обычно применяется к системам такого вида:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= A\vec{X} + B_1\vec{w} + B_2\vec{u}, \\ \vec{Z} &= C_1\vec{X} + D_{11}\vec{w} + D_{12}\vec{u}, \\ \vec{Y} &= C_2\vec{X} + D_{12}\vec{w} + D_{22}\vec{u}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где \vec{X} – вектор состояния системы, \vec{w} – возмущение системы, \vec{u} – управление системы, \vec{Z} – ошибка системы, что необходимо минимизировать, \vec{Y} – вектор измерений системы.

Корни характеристического уравнения системы (2.18) находятся внутри LMI области (2.15) тогда и только тогда, когда существует матрица P, являющаяся положительно определенной и удовлетворяющая следующим выражениям:

$$\begin{aligned} & [\lambda_{ij}P + \mu_{ij}(A + B_2K)P + \mu_{ij}P + \mu_{ji}P(A + B_2K)^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \\ & P > 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{где } [S_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{i1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mm} \end{pmatrix}.$$

ЛМІ области в свою очередь могут быть показаны как пересечение нескольких ЛМІ областей. В данной работе рассматривается ЛМІ область в виде пересечения диска с радиусом r с началом в точке $(-h, 0)$ и конического сектора с внутренним углом θ :

$$f_D(z) := \begin{pmatrix} -r & \bar{z} + h \\ z + h & -r \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$f_D(z) := \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2}(z + \bar{z}) & -\cos \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \\ \cos \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) & \sin \frac{\theta}{2}(z - \bar{z}) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Матрицы, которые используются в (2.18) для синтеза управления выглядят как:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (5c^2 - 2)n^2 & 0 & 0 & 0 & 2nc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2nc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$C_1 = \text{diag}[1,1,1,1,1,1], C_2 = \text{diag}[1,1,1,1,1,1], \quad (2.23)$$

$$D_{11} = 0_{6 \times 3}, D_{12} = [0_{3 \times 3}; \text{diag}[1,1,1]], D_{21} = 0_{6 \times 3}, D_{22} = 0_{6 \times 3}. \quad (2.24)$$

Линейно-квадратичного регулятора можно получить с помощью минимизации следующего критерия [82]:

$$J = \frac{1}{2} \int (\overline{\Delta r}^T Q \overline{\Delta r} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt, \quad (2.25)$$

где $\overline{\Delta r} = [x_T - x, y_T - y, z_T - z, v_x, v_y, v_z]$, Q, R – положительно определенные матрицы.

Линейное управление, полученное в результате минимизации (2.25):

$$\vec{u} = -R^{-1}B^T P \vec{\Delta r} = K \vec{\Delta r}, \quad (2.26)$$

где $B = B_2$ в (2.22), матрица R определяется как:

$$R = 0.0001 \cdot \text{diag}[1, 1, 1]. \quad (2.27)$$

Матрица P определяется с помощью решения следующего выражения:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (2.28)$$

где $A, B = B_2$ устанавливаются на основе (2.22), матрица Q будет в виде:

$$Q = 0.0001 \cdot \text{diag}[1, 1, 1, 1, 1, 1]. \quad (2.29)$$

Линейное H_2 управление рассматривается для следующих линейных систем:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= A\vec{X} + B_1\vec{w} + B_2\vec{u}, \\ \vec{Z} &= C_1\vec{X} + D_{12}\vec{u}, \\ \vec{Y} &= C_2\vec{X} + D_{12}\vec{w} + D_{22}\vec{u}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $D_{12}^T D_{12} > 0$.

Линейное управление устанавливается исходя из минимизации нормы H_2 передаточной функции системы $H_{zw}(s)$ [83]:

$$\|H_{zw}(s)\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{trace}(H_{zw}(j\omega)^T H_{zw}(j\omega)) d\omega. \quad (2.31)$$

Для определения нормы требуется решить следующую задачу: [40]:

$$\begin{aligned} &\min \text{trace}[(C_1 + D_{12}K)P(C_1 + D_{12}K)^T] \\ &s. t. (A + B_2K)P + P(A + B_2K)^T + B_1B_1^T \leq 0, \\ &P = P^T > 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Используя следующие обозначения: $X_2 = X_2^T = P$, $L = KP$, $Q = Q^T$ и выполняя соответствующие преобразования, получим оптимальную задачу:

$$\begin{aligned} &\min_{Q, X_2, L} \text{trace}(Q) \\ &s. t. AX_2 + X_2A^T + B_2L + L^TB_2^T + B_1B_1^T \leq 0, \\ &\begin{bmatrix} X_2 & X_2C_1^T + L^TD_{12}^T \\ C_1X_2 + D_{12}L & Q \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Используя матрицы A, B_1, B_2, C_1, D_{12} , указанные в (2.22) - (2.24), и определяя (X_2, L) из (3.33) можно вычислить матрицу коэффициентов обратной связи в виде $K = LX_2^{-1}$.

2.3 Результаты численного моделирования движения группировки

Для проведения численного анализа эффективности предложенных линейных законов управления предположим, что опорная орбита характеризуется следующими параметрами: радиус орбиты 42164 км, наклонение $I = 0^0$. Начальные условия движения приведены в таблице 2.1.

Для удобства анализа введем следующие параметры, связанные с задачей управления, направленной на сохранение начальной геометрической конфигурации группировки:

- погрешность относительного позиционирования $\Delta L_i = L_i - L_{i0}, i = \overline{1,3}$ между опорным спутником S_0 и спутниками S_1, S_2, S_3 , где L_i – текущее расстояние между опорным спутником S_0 и спутниками S_1, S_2, S_3 , L_{i0} – начальное расстояние между опорным спутником S_0 и спутниками S_1, S_2, S_3 ;

- погрешность относительного позиционирования $\Delta l_i = l_i - l_{i0}, i = \overline{1,3}$ между спутниками S_1, S_2, S_3 , где l_i – текущее расстояние между спутниками S_1, S_2, S_3 , l_{i0} – начальное расстояние между спутниками S_1, S_2, S_3 ;

- погрешность сохранения объема конфигурации $\Delta V = \left| \frac{V - V_0}{V_0} \right|$, где V – текущее значение объема; V_0 – начальное значения объема.

Таблица 2.1 – Начальные условия движения

Начальное положение (м) и скорость (мм/с), ось X	Начальное положение (м) и скорость (мм/с), ось Y	Начальное положение (м) и скорость (мм/с), ось Z
$x_1(t_0) = 21.637$	$y_1(t_0) = 0$	$z_1(t_0) = 15.3$
$x_2(t_0) = 21.637$	$y_2(t_0) = -13.25$	$z_2(t_0) = -7.65$
$x_3(t_0) = 21.637$	$y_3(t_0) = 13.25$	$z_3(t_0) = 7.65$
$v_{1x}(t_0) = 0$	$v_{1y}(t_0) = 1.578$	$v_{1z}(t_0) = 0$
$v_{2x}(t_0) = 0$	$v_{2y}(t_0) = 1.578$	$v_{2z}(t_0) = 0$
$v_{3x}(t_0) = 0$	$v_{3y}(t_0) = 1.578$	$v_{3z}(t_0) = 0$

В начале проведено исследование оценки «разбега» (или «дрейфа») спутников в группировке в случае отсутствия управления. Графики погрешности $\Delta L_i, \Delta l_i, \Delta V$ представлены на рисунках ниже.

Изменение расстояния ΔL_i для небольших временных интервалов, например, до 100 секунд, демонстрирует разнонаправленную динамику для каждого из ведомых спутников (рисунок 2.2). Например, наиболее выраженные изменения расстояния наблюдаются у спутников S_2 и S_3 , достигая соответственно 26.421 м и 26.579 м через 100 секунд. Изменение расстояния для S_1 протекает значительно медленнее, составляя, например, 26.501 м к моменту $t = 100$ секунд. Таким образом, отклонение от начально

заданных значений расстояний для L_2 и L_3 составляет 7.9, в то время как для $\Delta L_1 = 1$ мм.

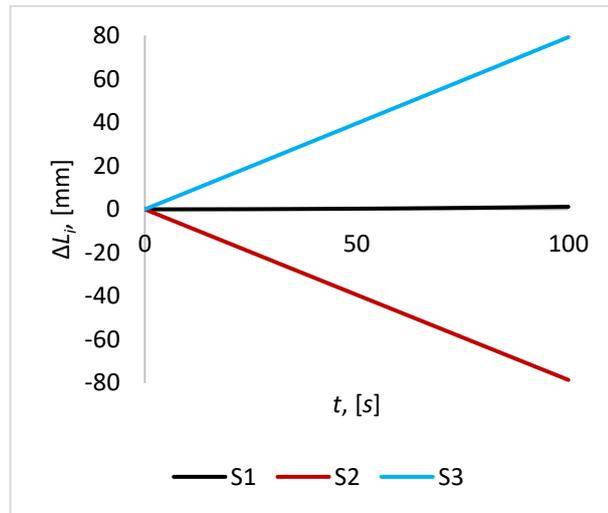


Рисунок 2.2 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta L_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 100$ с

При пассивном полете группировки без управления в течение часа (рисунок 2.3), смещение S_2 продолжает увеличиваться до 2.1 м, ΔL_1 составляет 1.3 м, в то время как ΔL_3 достигает 3.2 м через час. Это позволяет предположить, что при более продолжительных временных интервалах спутник S_1 будет еще более далеко отдаляться, тогда как спутник S_2 , возможно, в конечном итоге установится на стабильную орбиту, сохраняя постоянное расстояние, либо начнет снова приближаться к ведущему спутнику S_0 .

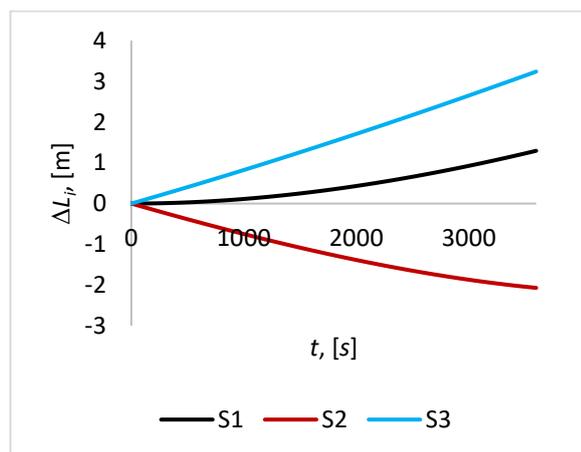


Рисунок 2.3 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta L_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 3600$ с.

Для более длительных промежутков времени, например, при полете в течение суток (рисунок 2.4) наблюдается неоднозначная картина. В течении суток для всех трех случаев можно наблюдать участок с постоянной амплитудой, начиная с $t = 80000$ сек $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3$ растут до 80000 секунды,

принимая максимальное значение 528.9 м и 283.9 м соответственно, данные значения сохраняются до конца суток (рисунок 2.4, а). Как и предполагалось, интенсивность отдаления S_1 начинает преобладать над остальными ведомыми космическими аппаратами начиная с 15000 секунды. Смещение S_2 к точке отсчета прекращается при $t = 5000$ с, доходя до своего пикового значения $\Delta L_2 = -2.2$ м. Далее наблюдается ее увеличение. Начиная с $t = 21700$ секунды, значения ΔL_2 и ΔL_3 становятся численно равны, далее характер и величины их вариации аналогичен.

Для более продолжительных временных промежутков, например, при полете в течение суток (рисунок 2.4), наблюдается разнообразная динамика. В течение суток для всех трех случаев можно выделить участок с постоянной амплитудой, начиная с $t = 80000$ секунд. ΔL_1 , ΔL_2 , ΔL_3 достигают своих максимальных значений 528.9 м и 283.9 м соответственно к 80000 секунде и остаются постоянными до конца суток (рисунок 2.4, а). Как и предполагалось, отдаление S_1 начинает превалировать над остальными ведомыми спутниками начиная с 15000 секунды. Смещение S_2 к точке отсчета прекращается к 5000 секундам, достигая своего максимума $\Delta L_2 = -2.2$ м. Затем наблюдается его увеличение. С 21700 секунды значения ΔL_2 и ΔL_3 становятся численно равными, и их динамика становится аналогичной.

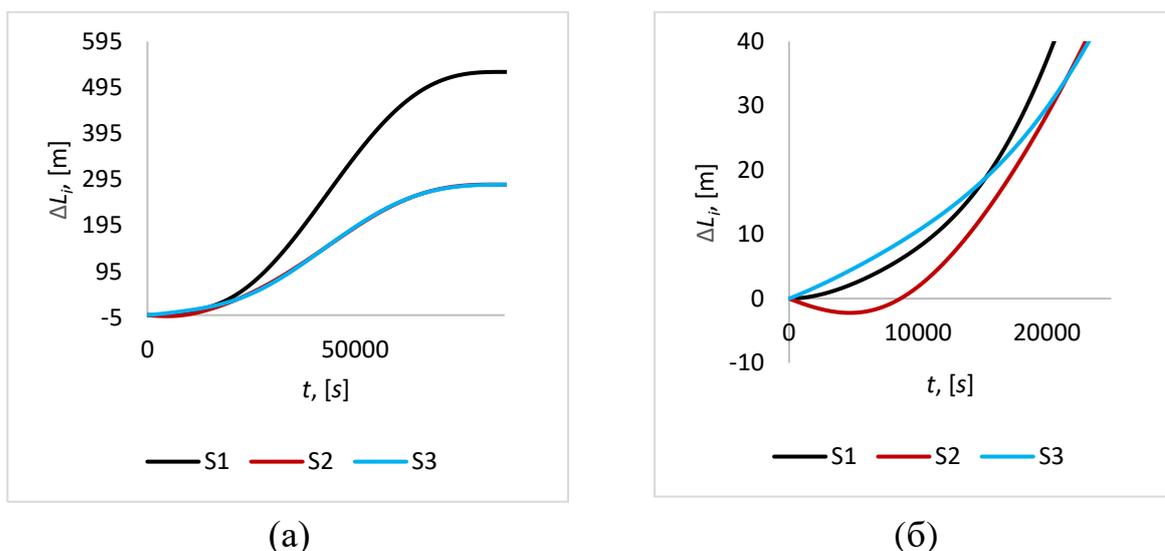


Рисунок 2.4 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta L_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 86400$ с.

При пассивном полете более суток характер кривых ΔL_1 , ΔL_2 , ΔL_3 аналогичен предыдущему случаю (рисунок 2.5). В течение трех суток уже можно выделить два участка, где отклонения ведомых спутников от ведущего сохраняют свои значения. Первый участок наблюдается между 80000 и 100000 секундами, а второй участок между 160000 и 180000 секундами, где ΔL_2 и ΔL_3 достигают 572.3 м, а $\Delta L_1 = 106$ м соответственно. Максимальные значения расстояний на данном промежутке приведены в таблице 2.2.

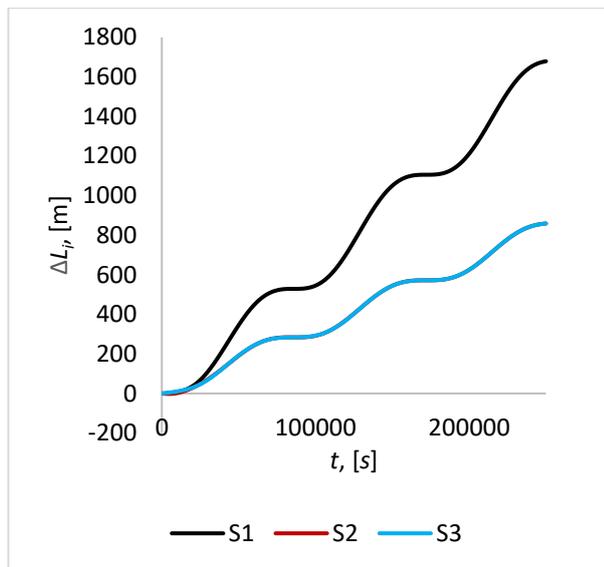


Рисунок 2.5 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta L_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 259200$ с

Таблица 2.2 - Таблица максимальных значений изменения расстояния между спутниками при движении без управления

t	$\max(\Delta L_1)$	ΔL_2	ΔL_3	Δl_1	Δl_2	Δl_3
0-100 с	+1 мм	-7.9 см	+7.9 см	-1.4 мм	-1.4 мм	+ 0.7 мм
0-3600 с	+1.3 м	-2.1 м	+3.2 м	-1.9 м	-1.9 м	+ 0.9 м
0-86400 с	+528.9 м	+283.9 м	+283.9 м	-839 м	-839 м	+26.5 м
0-259200 с	+1768.3 м	+858.3 м	+858.3 м	-2563 м	-2563 м	+26.5 м

В условиях пассивного полета изменение расстояния между спутниками $\Delta l_i, i = 1, \dots, 3$ при коротких временных интервалах, т.е. при $t \leq 3600$ с значительно меньше чем в случае изменения расстояний $\Delta L_i, i = 1, \dots, 3$ (рисунок 2.6). Например, при $t = 100$ с максимальные значения составляют $\Delta l_1 = \Delta l_2 = -1.4$ мм, $\Delta l_3 = 0.7$ мм.

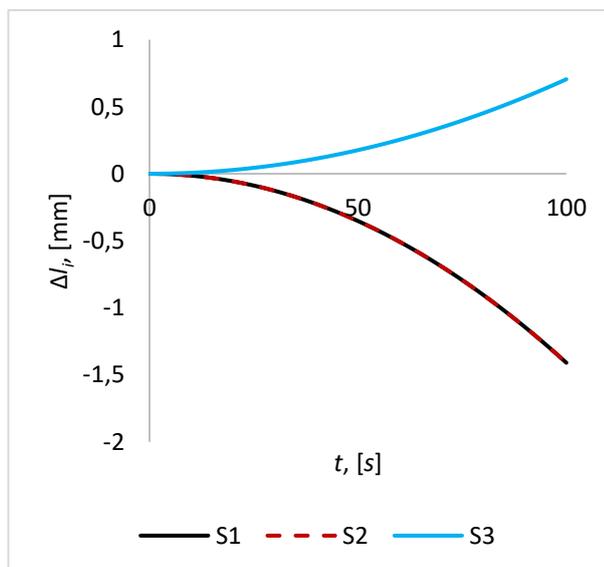


Рисунок 2.6 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta l_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 100$ с.

При $t = 3600$ с, модули величин расстояний ΔL и Δl становятся практически одного порядка (рисунок 2.7).

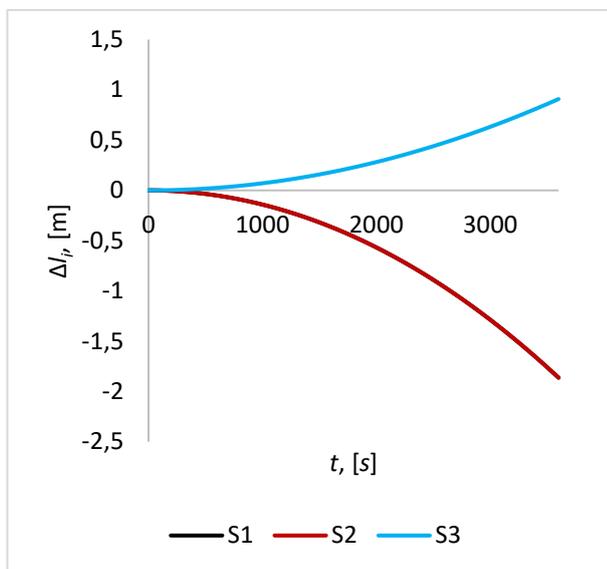


Рисунок 2.7 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta l_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 3600$ с

С увеличением времени полета (рисунок 2.8) при $t = 86400$ с можно отметить, что изменение расстояния Δl_3 приобретает периодический характер, с периодом в 43100 с, при котором максимальное значение Δl_3 достигает 26.5 м, что превышает изначально заданное расстояние в два раза. В то же время для Δl_1 и Δl_2 наблюдается монотонное увеличение их значений до момента времени 80000 с.

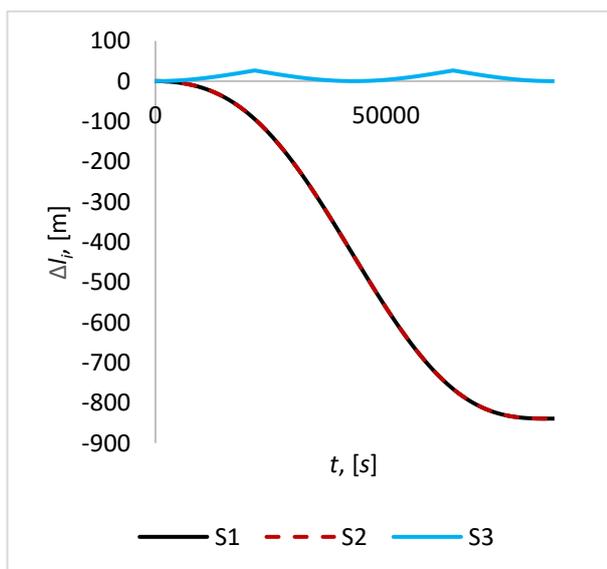


Рисунок 2.8 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta l_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 86400$ с

При пассивном полете более суток изменение расстояния Δl_3 между ведомыми спутниками S_2 и S_3 сохраняет периодический характер, имеющий период 43100 с, и амплитуду 26.5 м (рисунок 2.9). Максимальные значения расстояний на данном промежутке также представлены в таблице 2.2.

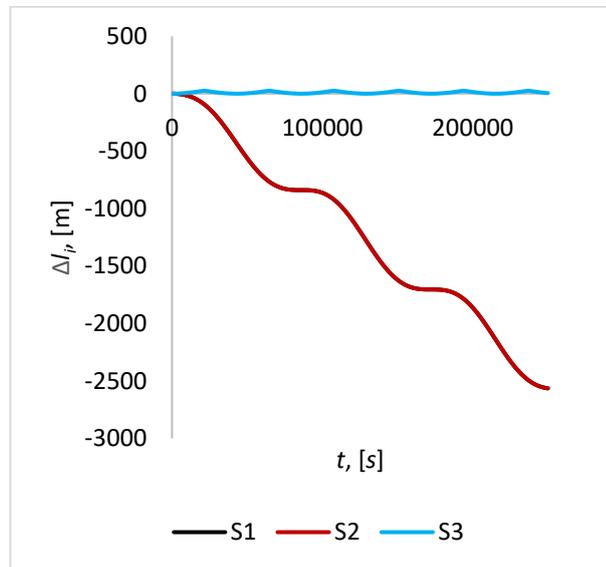


Рисунок 2.9 - Погрешность относительного позиционирования $\Delta l_i, i = 1, \dots, 3$ при $t = 259200$ с

Как упоминалось ранее, для оценки «разбега» спутников в группировке в условиях пассивного полета, иными словами, для оценки сохранения объема конфигурации были построены графики изменений ΔV для различных временных интервалов, начиная с 100 секунд и заканчивая 3 сутками. Здесь ΔV представляет собой модуль отклонения объема группировки от его первоначального значения, например при $\Delta V = 1$ можно сделать вывод, что объем остается неизменным по сравнению с изначальным значением.

Для небольших временных промежутков замечен медленный, но стабильный рост объема (рисунок 2.10 а, б), что подчеркивает необходимость активного управления группировкой уже на начальных этапах движения. При длительных периодах, таких как сутки и более, наблюдается периодическое изменение объема группировки (см. рисунок 2.10, в, г).

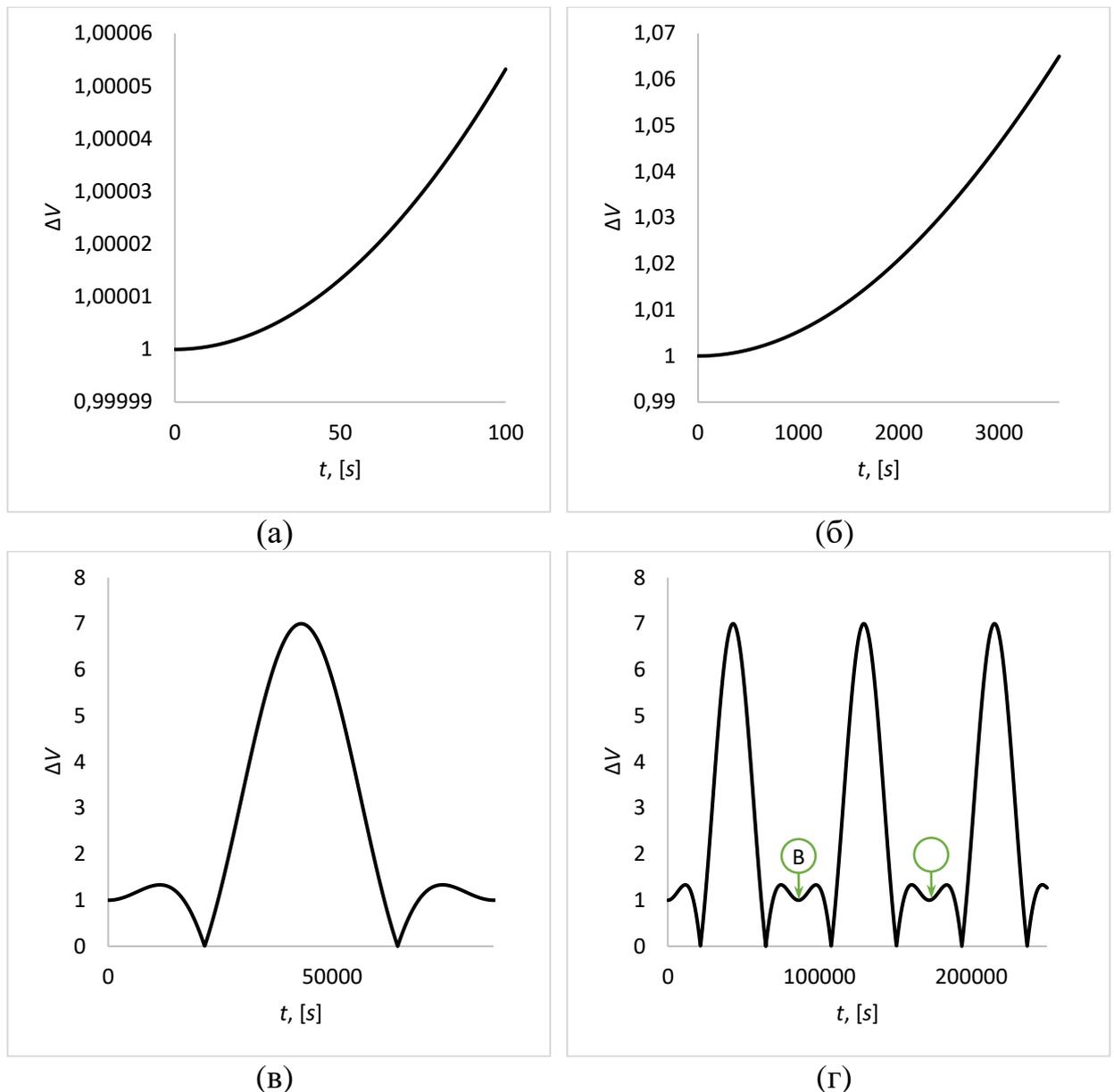


Рисунок 2.10 - Погрешность сохранения объема конфигурации: (а) – $t = 100$ s, (б) – $t = 3600$ s, (в) – $t = 86400$ s, (г) – $t = 259200$ s.

Далее было проведено исследование управляемого движения спутников в группировке. Графики погрешности ΔL_i , Δl_i , ΔV показаны на соответствующих рисунках (рисунок 2.11-2.17). Здесь задано требуемое расстояние между спутниками, принятое равным $L_{i0} = 26.5$ m, $l_{i0} = 26.5$ m. Результаты анализа эффективности рассмотренных законов управления представлены в таблице 2.3:

- оценка эффективности законов управления с точки зрения времени переходных процессов, перерегулирования и демпфирования;
- критическое рассмотрение сохранности геометрической конфигурации группировки, основанное на данных об объеме группировки;
- изучение погрешности позиционирования спутников в группировке.

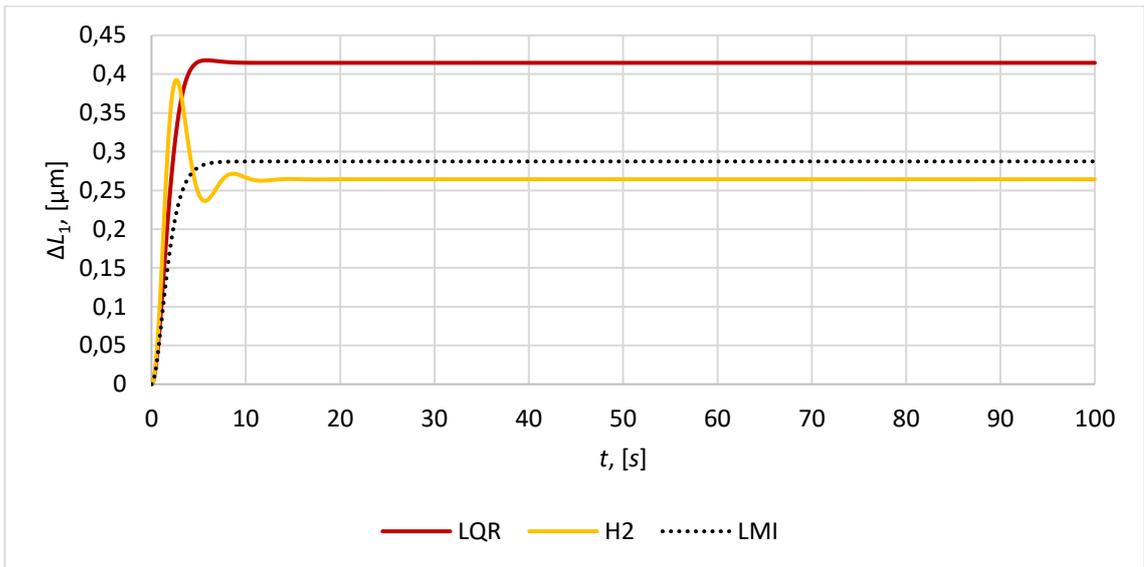


Рисунок 2.11 - Погрешность относительного позиционирования ΔL_1

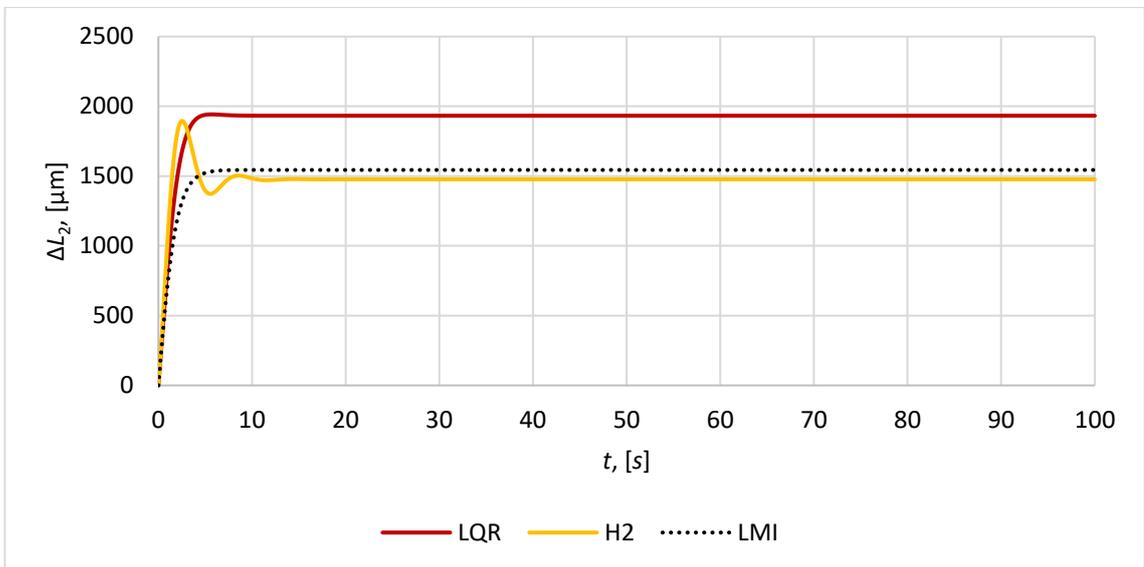


Рисунок 2.12 - Погрешность относительного позиционирования ΔL_2

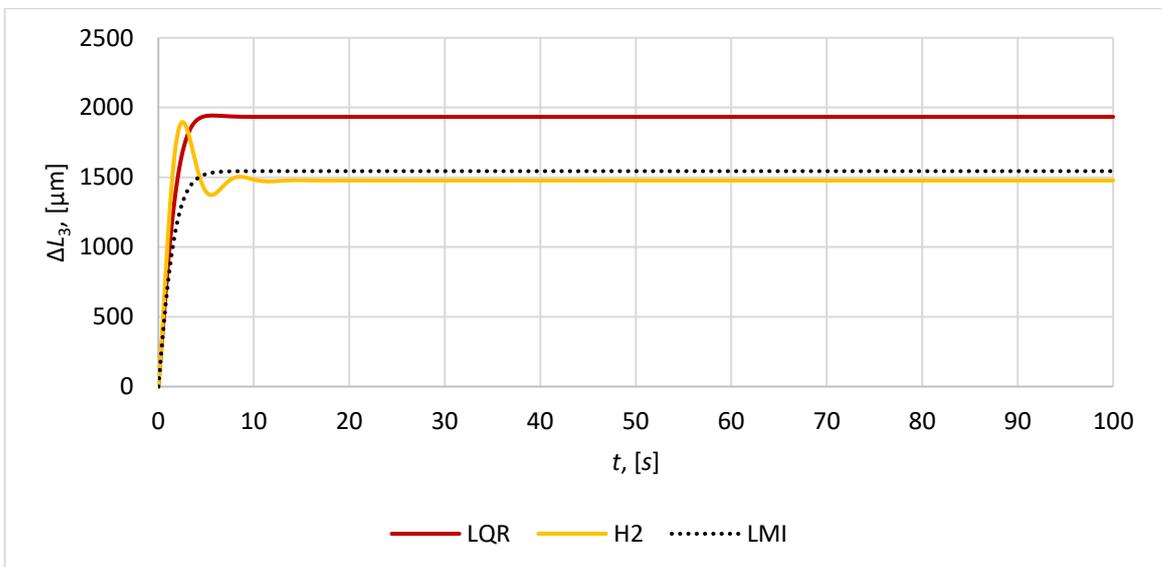


Рисунок 2.13 - Погрешность относительного позиционирования ΔL_3

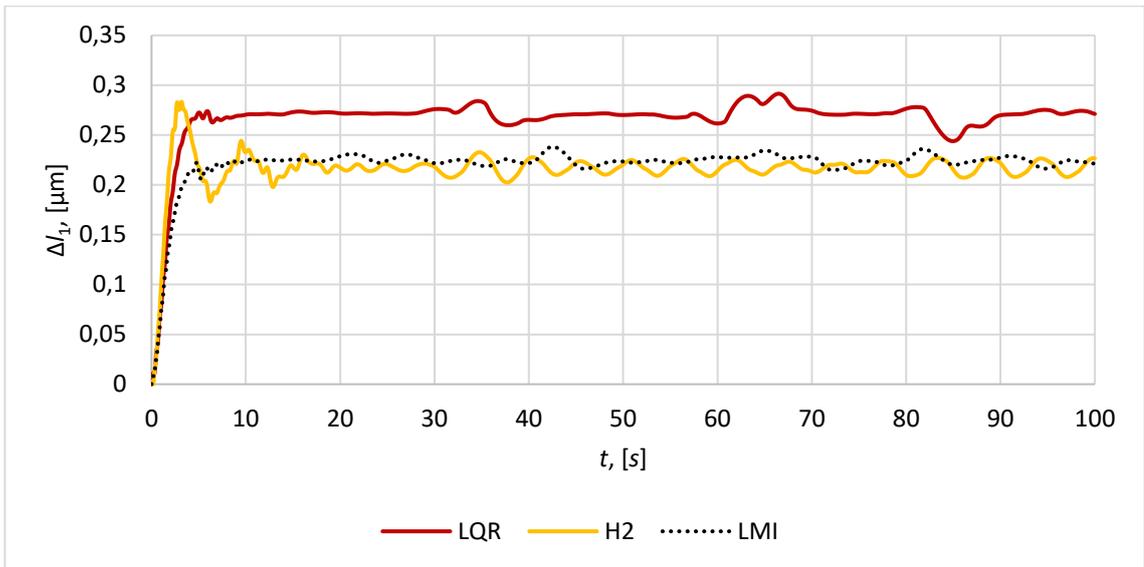


Рисунок 2.14 - Погрешность относительного позиционирования Δl_1

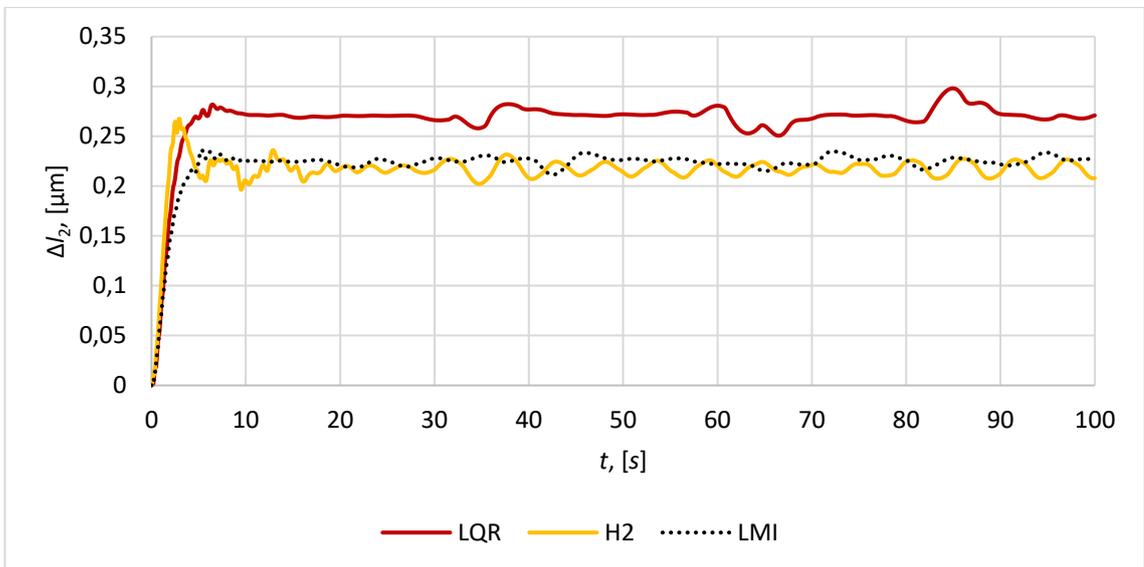


Рисунок 2.15 - Погрешность относительного позиционирования Δl_2

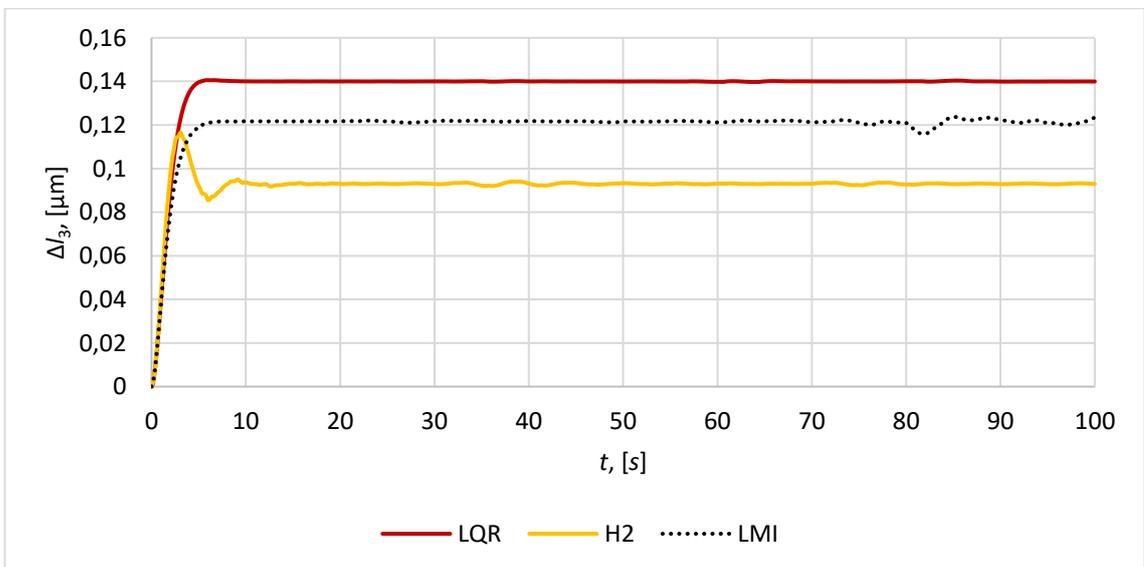


Рисунок 2.16 - Погрешность относительного позиционирования Δl_3

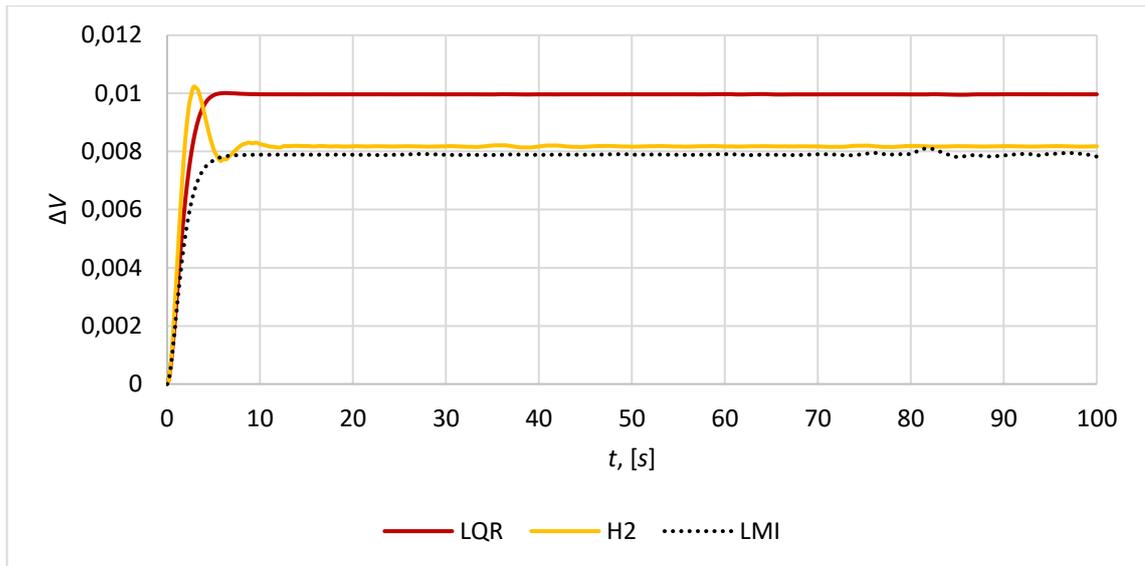


Рисунок 2.17 - Погрешность сохранения объема конфигурации ΔV

Согласно анализу, использование оптимального H_2 регулятора приводит к возникновению колебательности на графиках взаимного расстояния между спутниками. Максимальная погрешность взаимного позиционирования для спутников S_1, S_2, S_3 составляет 0.21 мкм, а между спутниками S_0 и S_1, S_2, S_3 - 1477 мкм. При этом максимальная необходимая тяга для достижения указанной точности позиционирования составляет 0.271 Н.

LQR регулятор обеспечивает быстрые времена переходных процессов и стабильность объема группировки. Максимальная погрешность взаимного позиционирования для спутников S_1, S_2, S_3 составляет 0.27 мкм, а между спутниками S_0 и S_1, S_2, S_3 - 1932 мкм.

Линейный регулятор с размещением полюсов в LMI областях рассмотрен для двух случаев:

1) полюса (корни характеристического уравнения) располагаются в области, ограниченной кругом с центром в точке $(-2,0)$ на комплексной плоскости и радиусом 2;

2) полюса (корни характеристического уравнения) находятся в области, ограниченной конусом с вершиной в точке $(-0.1, 0)$ и внутренним углом $3\pi/4$.

Регулятор обеспечивает достижение высоких показателей в части времени переходных процессов и демпфирования. Максимальная погрешность взаимного позиционирования для спутников S_1, S_2, S_3 составляет 0.22 мкм, а максимальная погрешность взаимного позиционирования между спутниками S_0 и S_1, S_2, S_3 составляет 1544 мкм. Однако этот регулятор более чувствителен к возмущениям, чем H_2 и LQR, что проявляется в нестабильности объема группировки.

Таблица 2.3 – Качественный анализ регуляторов

Коэффициенты регулятора	Точность, $\mu\text{м}$	Время переходных	Перерегулирование, %	Характер демпфирования	Характер изменения	Макс. Управляющее

			процес- сов, сек			ния объема	усилие, Н
LMI	$k_x = 1.251687$ $k_{Vx} = 2.219016$ $k_y = 1.251687$ $k_{Vy} = 2.219016$ $k_z = 1.251687$ $k_{Vz} = 2.219016$	$E_{\Delta L_1} = 0.28$ $E_{\Delta L_2} = 1544$ $E_{\Delta L_3} = 1544$ $E_{\Delta l_1} = 0.22$ $E_{\Delta l_2} = 0.22$ $E_{\Delta l_3} = 0.12$	$T_{\Delta L_1} = 9$ $T_{\Delta l_1} = 9$	$\delta_{\Delta L_1} = 0.24$ $\delta_{\Delta L_2} = 0.06$ $\delta_{\Delta L_3} = 0.06$ $\delta_{\Delta l_1} = 4.5$ $\delta_{\Delta l_2} = 4.5$ $\delta_{\Delta l_3} = 0.16$	ΔL , апериоди- ческий Δl , колебате- льный	Нестабил- ный с 77 сек	0.226
LQR	$k_x = 1.000000$ $k_{Vx} = 1.732050$ $k_y = 0.999999$ $k_{Vy} = 1.732050$ $k_z = 0.999999$ $k_{Vz} = 1.732050$	$E_{\Delta L_1} = 0.41$ $E_{\Delta L_2} = 1932$ $E_{\Delta L_3} = 1933$ $E_{\Delta l_1} = 0.27$ $E_{\Delta l_2} = 0.27$ $E_{\Delta l_3} = 0.13$	$T_{\Delta L_1} = 9$ $T_{\Delta l_1} = 8$	$\delta_{\Delta L_1} = 0.72$ $\delta_{\Delta L_2} = 0.51$ $\delta_{\Delta L_3} = 0.51$ $\delta_{\Delta l_1} = 1.8$ $\delta_{\Delta l_2} = 1.8$ $\delta_{\Delta l_3} = 0.71$	ΔL , монотон- ный Δl , колебате- льный	Стабильн- ый	0.229
H_2	$k_x = 1.308335$ $k_{Vx} = 0.925006$ $k_y = 1.308335$ $k_{Vy} = 0.925006$ $k_z = 1.308335$ $k_{Vz} = 0.925006$	$E_{\Delta L_1} = 0.26$ $E_{\Delta L_2} = 1477$ $E_{\Delta L_3} = 1477$ $E_{\Delta l_1} = 0.21$ $E_{\Delta l_2} = 0.21$ $E_{\Delta l_3} = 0.09$	$T_{\Delta L_1} = 16$ $T_{\Delta l_1} = 20$	$\delta_{\Delta L_1} = 38$ $\delta_{\Delta L_2} = 28$ $\delta_{\Delta L_3} = 28$ $\delta_{\Delta l_1} = 27$ $\delta_{\Delta l_2} = 27$ $\delta_{\Delta l_3} = 11$	ΔL , колебате- льный у Δl , колебате- льный	Стабильн- ый	0.271

В исследуемой задаче управления наиболее высокую точность взаимного позиционирования спутников обеспечивают H_2 и LMI регуляторы, тогда как наилучшую стабильность позиционирования обеспечивает LQR регулятор.

3. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СОХРАНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ГРУППИРОВКИ СПУТНИКОВ В СЛУЧАЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ С УЧЕТОМ ОСНОВНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

3.1 Разработка математической модели движения группировки спутников в случае возмущенной опорной орбиты с учетом основных возмущающих сил

Исследуем обобщенный случай, при котором опорный спутник находится в возмущенном движении. В данной ситуации постановка задачи и начальные условия аналогичны тем, что описаны в главе 2 (Рисунок 2.1 и Таблица 2.1). При возмущении опорной орбиты решение будем искать в следующей форме:

$$\ddot{\vec{r}} = f(\vec{r}) + \nabla f(\vec{r})\delta\vec{r}$$

где, $\nabla f(\vec{r})$ – приращение за счет возмущения опорной орбиты, $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ – радиус-вектор ведомого спутника относительно возмущенной опорной орбиты, тогда как $g(r)$ – однородное поле притяжения Земли. Как и прежде $J_2(\vec{r})$ – возмущения описывающие неоднородность поля притяжения Земли. В этом случае уравнения движения группировки спутников можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \delta\ddot{\vec{r}} + 2\bar{\omega} \times \delta\dot{\vec{r}} + \bar{\varepsilon} \times \delta\vec{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \delta\vec{r}) = \\ & = g(\vec{r}) + \nabla g(\vec{r})\delta\vec{r} + J_2(\vec{r}) + \nabla J_2(\vec{r})\delta\vec{r} \\ & + \sum_{j=1}^n (R_j(\vec{r}) + \nabla R_j(\vec{r})\delta\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где, $R_j(\vec{r})$ – возмущения включающие в себя возмущения луны и солнца, давление сил света солнечных лучей и т.д., $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ – угловая скорость и ускорение радиус-вектора ведомого спутника относительно опорной орбиты.

Однородность гравитационного поля Земли в опорной системе координат выражается следующим образом:

$$g(\vec{r}) = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \nabla g(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \frac{2\mu}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu}{r^3} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Неоднородность гравитационного поля Земли с учетом зональной гармоник можно выразить следующим образом:

$$J_2 = -\frac{3J_2\mu R_E^2}{2r^4} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta \\ \sin^2 i \sin 2\theta \\ \sin 2i \sin \theta \end{bmatrix},$$

$$\nabla J_2(r) = \frac{6J_2\mu R_E^2}{r^5} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta & \sin^2 i \sin 2\theta & \sin 2i \sin \theta \\ \sin^2 i \sin 2\theta & -\frac{1}{4} - \sin^2 i \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \theta \right) & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \theta \\ \sin 2i \sin \theta & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \theta & -\frac{1}{4} + \sin^2 i \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \theta \right) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

В случае геостационарной орбиты следует учитывать возмущения, вызванные гравитационным притяжением Луны и Солнца. Оценка возмущающих сил на различных высотах орбиты представлена на рисунке 3.1 [81, 84-85].

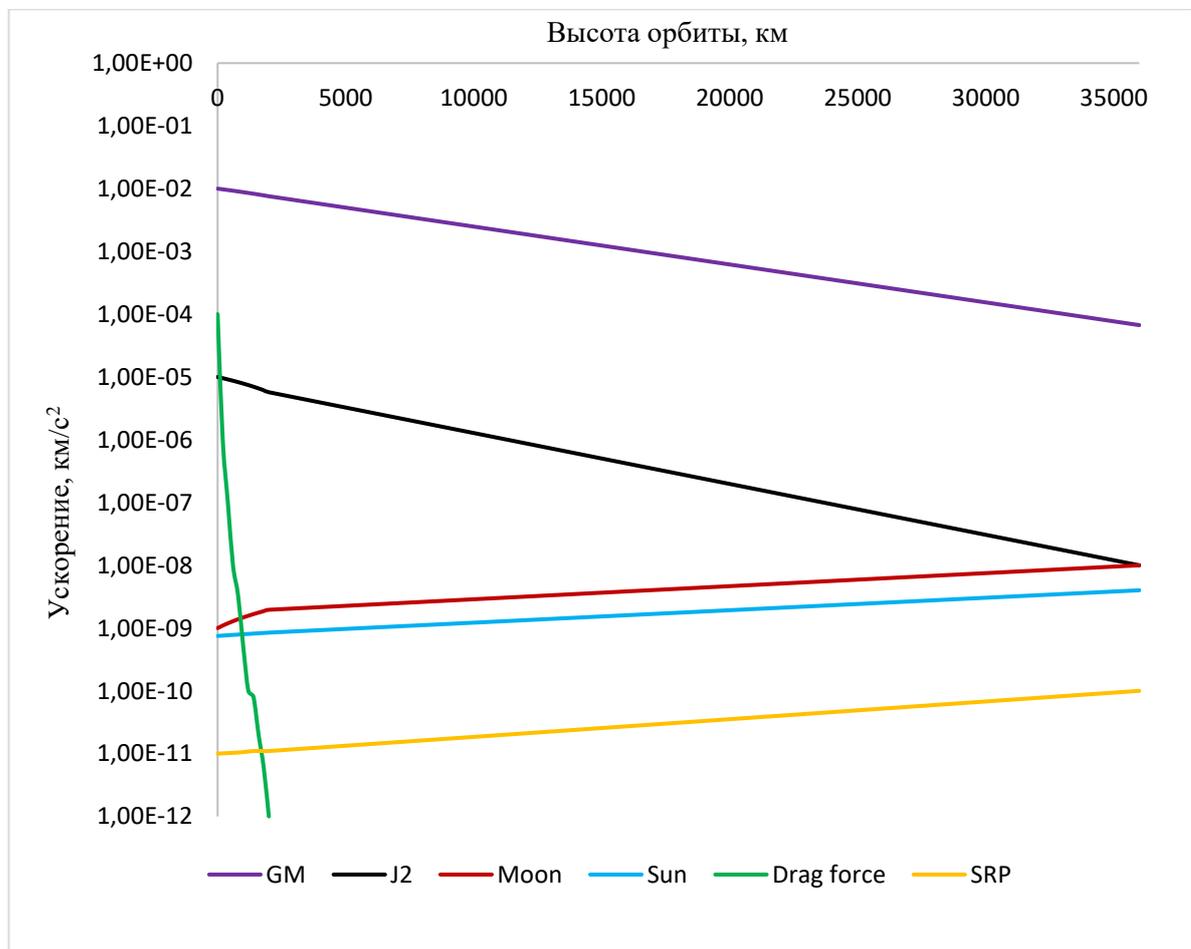


Рисунок 3.1 – Оценка возмущающих сил относительно высоты орбиты

Исходя из рисунка 3.1, в данном случае основными возмущающими силами являются силы притяжения Луны и Солнца, а также силы светового давления Солнца.

При учете однородности поля притяжения луны и солнца возмущения будут определяться в виде:

$$R_{Moon} = \frac{\mu_{Moon} r}{\rho_{Moon}^3} \begin{bmatrix} 3 \sin^2 i \sin^2 \theta - 1 \\ \frac{3}{2} \sin^2 i \sin 2\theta \\ \frac{3}{2} \sin 2i \sin \theta \end{bmatrix}, R_{Sun} = \frac{\mu_{Sun} r}{\rho_{Sun}^3} \begin{bmatrix} 3 \sin^2 i \sin^2 \theta - 1 \\ \frac{3}{2} \sin^2 i \sin 2\theta \\ \frac{3}{2} \sin 2i \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

здесь ρ_{Moon} – радиус-вектор направленный от Земли к Луне, тогда как ρ_{Sun} – радиус-вектор направленный от Земли к Солнцу.

Возмущения, вызванные давлением солнечных лучей (или SRP), можно выразить следующим образом:

$$R_{SRP} = -\frac{P_{SRP} C_r A_{sat}}{m_{sat}} \delta \bar{r}, P_{SRP} = P_0 \left(\frac{R_0}{\rho_{Sun}} \right)^2, C_r = 2(1 - \rho_s) \quad (3.4)$$

где C_r - коэффициент отражения, $P_0 = 4.57 \times 10^{-6}$ постоянная характеризующая SRP при 1 а.е., A_{sat}/m_{sat} соотношение площади спутника к его массе [86]. Преобразовываем уравнение (4.4) в виде:

$$R_{SRP} = -C_r q_{SRP} \frac{(1 - \mu)}{\rho_{ps}^2} \delta \bar{r}, q_{SRP} = \frac{P_0 R_0^2}{G m_{Sun}} \frac{A_{sat}}{m_{sat}}, \rho_{ps}^2 = (\delta x + \mu)^2 + \delta y^2 + \delta z^2. \quad (3.5)$$

Проведем линейризацию возмущений

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_2(r) d\theta = \begin{bmatrix} -n^2 r s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla J_2(r) d\theta = n^2 \begin{bmatrix} 4s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -3s \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla R_{Moon, Sun} d\theta = \begin{bmatrix} 2 \frac{\mu_{Moon, Sun}}{\rho_{Moon, Sun}^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_{Moon, Sun}}{\rho_{Moon, Sun}^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_{Moon, Sun}}{\rho_{Moon, Sun}^3} \end{bmatrix}.$$

Получим систему уравнений движения ведомого спутника относительно возмущенной опорной орбиты в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \delta\ddot{x}_i - 2nc\delta\dot{y}_i - (5c^2 - 2)n^2\delta x_i \\ &= -C_r q_{SRP} \frac{(1-\mu)}{\rho_{ps}^2} (A \cos u + B \sin u) + \xi_x(t), \\ \delta\ddot{y}_i + 2nc\delta\dot{x}_i &= -C_r q_{SRP} \frac{(1-\mu)}{\rho_{ps}^2} (-A \sin u + B \cos u) + \xi_y(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\delta\ddot{z}_i + q_i^2 \delta z_i = 2f_i q_i \cos(q_i t + \varphi) - C_r q_{SRP} \frac{(1-\mu)}{\rho_{ps}^2} C + \xi_z(t),$$

где,

$$A = \cos(\Omega_i - \Omega_{Sun}) \cos u_{Sun} + \cos i_{Sun} \sin u_{Sun} \sin(\Omega_i - \Omega_{Sun}),$$

$$\begin{aligned} B &= \cos I (-\sin(\Omega_i - \Omega_{Sun}) \cos u_{Sun} \\ &\quad + \cos i_{Sun} \sin u_{Sun} \cos(\Omega_i - \Omega_{Sun})) \\ &\quad + \sin I \sin i_{Sun} \sin u_{Sun}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sin I (\sin(\Omega_i - \Omega_{Sun}) \cos u_{Sun} \\ &\quad - \cos i_{Sun} \sin u_{Sun} \cos(\Omega_i - \Omega_{Sun})) \\ &\quad + \cos I \sin i_{Sun} \sin u_{Sun}, i = 1 \dots 3. \end{aligned}$$

здесь, $\Omega_{Sun}, i_{Sun}, u_{Sun}$ - долгота восходящего узла, наклонение и аргумент широты для Солнца, $\xi(t)$ - функция описывающая разного рода неопределенности, например белый шум, i номер ведомого спутника.

Для оценки влияния основных возмущающих сил были построены графики, показывающие модули разности радиус-векторов для невозмущенной и возмущенной опорной орбиты в следующем виде:

$$\Delta = \sqrt{(x - \delta x)^2 + (y - \delta y)^2 + (z - \delta z)^2}.$$

Для анализа динамики возмущающих сил в зависимости от высоты орбиты были построены графики отклонений для группировки с одинаковой конфигурацией на низких, средних и геостационарных орбитах (Рисунок 4.2). Интегрирование уравнений движения (3.7) выполнялось методом Рунге-Кутты-Фельберга с шагом 0,001 секунды. При определении возмущений от сил притяжения Луны и Солнца, они рассматривались как точечные массы, а их координаты на начало каждого шага интегрирования определялись по алгоритмам Пуллкинена и Фландерна (для Луны) и Стэндиша (для Солнца) [87]. Для определения возмущений от сил светового давления предполагалось полное отражение света освещённой поверхностью спутника.

Как видно, с повышением высоты орбиты возрастает и разность между возмущенными и невозмущенными координатами. Это связано с уменьшением влияния гравитационного поля Земли и усилением гравитационных возмущений со стороны Луны и Солнца, а также воздействием сил светового давления. На 160-й секунде полета для геостационарной орбиты (Рисунок 3.2, синяя кривая) модуль отклонения

составляет 216 мкм, что в 2,2 раза больше, чем для низкой орбиты LEO при высоте 600 км (Рисунок 3.2, красная кривая), и в 2 раза больше, чем для средней орбиты МЕО при высоте 2000 км (Рисунок 3.2, черная кривая). В целом амплитуда колебаний со временем периодически увеличивается. Также видно, что уменьшается период колебаний для геостационарных орбит, что является характерной особенностью для высоких орбит, включая геостационарных орбит (GEO).

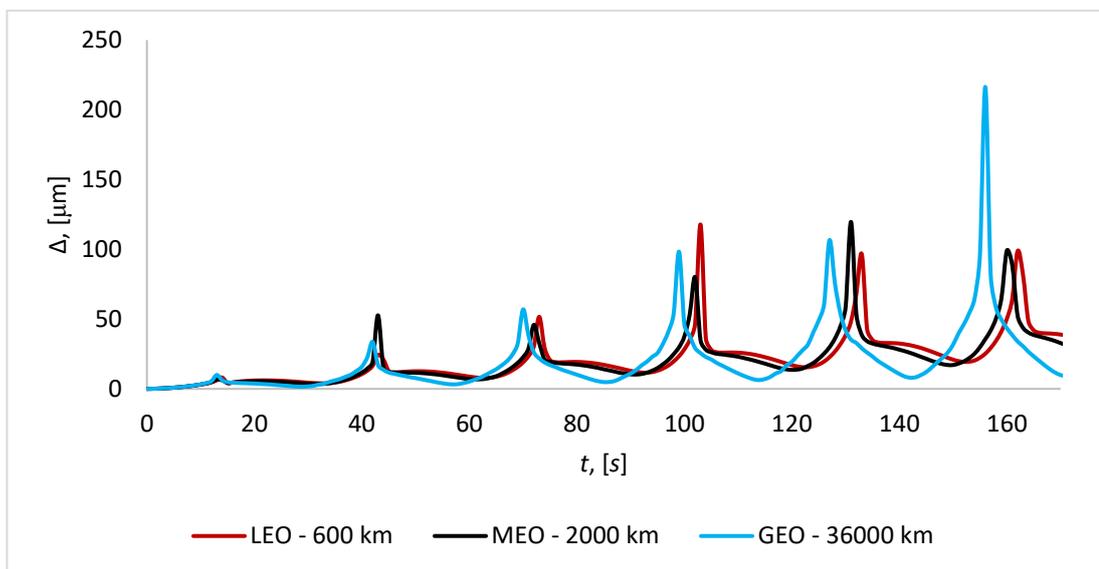


Рисунок 3.2 - Динамика модуля разности для разных орбит.

Исходя из этого можно заметить что в самом общем случае даже на коротких интервалах времени, для реализации интерферометра Физо в связи с ростом модуля разности необходимо исследование условий устойчивости конфигураций группировки и соответственно наличие активной системы управления.

Исходя из этого, можем подытожить, что на коротких временных интервалах для реализации интерферометра Физо, в связи с увеличением модуля разности координат, необходимо изучить условия устойчивости конфигураций группировки. Соответственно, требуется активная система управления.

3.2 Построение алгоритмов управления конфигурацией группировки в случае возмущенной опорной орбиты с учетом неопределенностей

Из-за возмущенного движения опорной орбиты и различных неопределенностей нужно внедрить систему управления, основанную на таких робастных алгоритмах как H_2 , H_∞ или μ -синтез [88].

При рассмотрении случае с H_∞ оптимальный регулятор применяется для линейных систем, описанных в пространстве состояний. Вопрос управления с обратной связью по состоянию сводится к созданию регулятора $\vec{u} = K\vec{X}$, который минимизирует H_∞ норму передаточной функции $H_{zw}(s)$:

$$\|H_{zw}(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega \in R} \sigma_{max}(F(j\omega)) \quad (3.8)$$

Для вычисления этой нормы нужно решить задачу вида:

$$\begin{aligned} & \min_{P,K,\gamma} \gamma \\ \text{s. t. } & \begin{bmatrix} (A + B_2K)^T P + P(A + B_2K) & PB_1 & (C_1 + D_{12}K)^T \\ B_1^T P & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12}K & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \\ & P > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Устанавливая, что $X_{\infty} = X_{\infty}^T = P$, $L = KP$ и применяя превращения вида (3.9), получим:

$$\begin{aligned} & \min_{X_{\infty},L,\gamma} \gamma \\ \text{s. t. } & \begin{bmatrix} (AX_{\infty} + B_2L)^T + (AX_{\infty} + B_2L) & B_1 & (C_1 + D_{12}L)^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12}L & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \\ & X_{\infty} > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Матрицы состояний A , B_1 , B_2 , C_1 , D_{12} находятся прежним образом. После определения (X_{∞}, L) матрица усиления обратной связи по состоянию вычисляется как $K = LX_{\infty}^{-1}$.

При комбинированном робастном регуляторе вида H_2/H_{∞} , уравнения в пространстве состояний можем определить как:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= A\vec{X} + B_1\vec{w} + B_2\vec{u}, \\ \vec{Z}_{\infty} &= C_{\infty}\vec{X} + D_{\infty 1}\vec{w} + D_{\infty 2}\vec{u}, \\ \vec{Z}_2 &= C_2\vec{X} + D_{21}\vec{w} + D_{22}\vec{u}, \\ \vec{Y} &= C_y\vec{X} + D_{y1}\vec{w}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где \vec{X} вектор состояний, \vec{u} вектор описывающий управляющее взаимодействие, тогда как $\vec{w} \rightarrow \vec{Z}_{\infty}$, а $\vec{w} \rightarrow \vec{Z}_2$.

В результате в случае комбинированного регулятора H_2/H_{∞} получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_k &= A_k\vec{x}_k + B_k\vec{Y}, \\ \vec{u} &= C_k\vec{x}_k + D_k\vec{Y}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Данный метод помогает стабилизацию системы экспоненциально, при H_{∞} сходимость будет иметь вид $\|H_{\vec{w} \rightarrow \vec{Z}_{\infty}}(K)\|_{\infty} \leq \gamma$, тогда как при H_2 норма $\|H_{\vec{w} \rightarrow \vec{Z}_2}(K)\|_2$ минимизируется для всех K .

Следовательно, задача смешанного синтеза H_2/H_{∞} -представляет собой условие оптимизации вида:

$$\begin{aligned} & \min \|H_{\vec{w} \rightarrow \vec{z}_2}(K)\|_2 \\ & \text{s. t. } \|H_{\vec{w} \rightarrow \vec{z}_\infty}(K)\|_\infty \leq \gamma, \\ & K \text{ stabilizes system internally,} \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $H_{\vec{w} \rightarrow \vec{z}_2}(K, s)$ обозначает передаточную функцию при H_2 с обратной связью, а $H_{\vec{w} \rightarrow \vec{z}_\infty}(K)$ это передаточная функция при H_∞ , соответственно γ является пороговым значением сходимости.

Исходя из (2.7) матрицы состояний $A, B_1, B_2, C_\infty, D_{\infty 1}, D_{\infty 2}, C_2, D_{21}, D_{22}, C_y, D_{y1}$ при комбинированном робастном управлении H_2/H_∞ будет иметь вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (5c^2 - 2)n^2 & 0 & 0 & 0 & 2nc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2nc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_\infty = \text{diag}[1,1,1,1,1,1], \quad C_2 = \text{diag}[1,1,1,1,1,1], \quad C_y = \text{diag}[1,1,1,1,1,1], \quad (3.15)$$

$$D_{\infty 1} = 0_{6 \times 3}, \quad D_{\infty 2} = [0_{3 \times 3}; \text{diag}[1,1,1]], \quad D_{21} = 0_{6 \times 3}, \quad D_{22} = 0_{6 \times 3}, \quad D_{y1} = 0_{6 \times 3} \quad (3.16)$$

здесь матрица B_1 иллюстрирует влияние белого шума на происходящий процесс.

Комбинированный робастный регулятор H_2/H_∞ обладает высокой точностью и производительностью в поддержании конфигурации благодаря объединению преимуществ методов H_2 и H_∞ . По результатам моделирования данный комбинированный регулятор предоставляет оптимальные результаты как по времени переходного процесса, так и по точности. Самая большая ошибка относительного положения ведомых спутников составляет 0,17 мкм, а максимальная ошибка взаимного положения ведомых, т.е. зеркальных спутников относительно опорного спутника составляет 1129 мкм в случае максимального импульса управления в 0,231 Н. Регулятор H_∞ демонстрирует сходные результаты по точности, времени переходного процесса, характеру импульса управления и формированию группировки. Максимальная ошибка относительного положения ведомых спутников составляет 0,20 мкм, а максимальная ошибка относительного положения относительно опорного спутника - 1366 мкм (см. Таблицу 3.1 и Рисунки 3.3-3.10).

Комбинированный робастный регулятор H_2/H_∞ дает большую точность и производительность в процессе сохранения конфигурации, поскольку сочетает в себе преимущества метода как H_2 , так и метода H_∞ . По результатам моделирования комбинированный регулятор H_2/H_∞ обеспечивает наилучшие результаты с точки зрения времени переходного процесса и точности, поскольку максимальная ошибка относительного положения ведомых спутников составляет 0,17 мкм, а максимальная ошибка взаимного положения ведомых спутников относительно опорного спутника составляет 1129 мкм при максимальном импульсе управления в 0,231 Н. Регулятор H_∞ показывает подобные результаты по точности, времени переходного процесса, импульсу управления, характеру объема и по высоте тетраэдральной конфигурации группировки спутников. Он обеспечивает максимальную ошибку относительного положения ведомых спутников 0,20 мкм и максимальную ошибку относительного положения относительно опорного спутника 1366 мкм (Таблица 3.1 и Рисунки 3.3-3.10).

Таблица 3.1 – Анализ качества регуляторов

	Коэффициенты регулятора	Точность, μm	Время переходного процесса, сек	Перерегулирование, %	Характер демпфирования	Характер значений	Максимальная амплитуда, Н
$H_2 s.t. \ H_\infty\ < 0.8$	$k_x = 1.711509$ $k_{Vx} = 2.318171$ $k_y = 1.711509$ $k_{Vy} = 2.318171$ $k_z = 1.711509$ $k_{Vz} = 2.318171$	$E_{\Delta L_1} = 0.18$ $E_{\Delta L_2} = 1129$ $E_{\Delta L_3} = 1129$ $E_{\Delta l_1} = 0.17$ $E_{\Delta l_2} = 0.17$ $E_{\Delta l_3} = 0.07$	$T_{\Delta L_1} = 6$ $T_{\Delta l_1} = 10$	$\delta_{\Delta L_1} = 0.49$ $\delta_{\Delta L_2} = 0.17$ $\delta_{\Delta L_3} = 0.17$ $\delta_{\Delta l_1} = 11$ $\delta_{\Delta l_2} = 11$ $\delta_{\Delta l_3} = 0.27$	ΔL , монотонный Δl , колебательный	Стабильный	0.231
H_∞	$k_x = 1.414735$ $k_{Vx} = 2.068161$ $k_y = 1.414735$ $k_{Vy} = 2.068161$ $k_z = 1.414735$ $k_{Vz} = 2.068161$	$E_{\Delta L_1} = 0.24$ $E_{\Delta L_2} = 1366$ $E_{\Delta L_3} = 1366$ $E_{\Delta l_1} = 0.20$ $E_{\Delta l_2} = 0.20$ $E_{\Delta l_3} = 0.09$	$T_{\Delta L_1} = 6$ $T_{\Delta l_1} = 9$	$\delta_{\Delta L_1} = 0.8$ $\delta_{\Delta L_2} = 0.29$ $\delta_{\Delta L_3} = 0.29$ $\delta_{\Delta l_1} = 10$ $\delta_{\Delta l_2} = 10$ $\delta_{\Delta l_3} = 0.11$	ΔL , монотонный Δl , колебательный	Стабильный	0.231

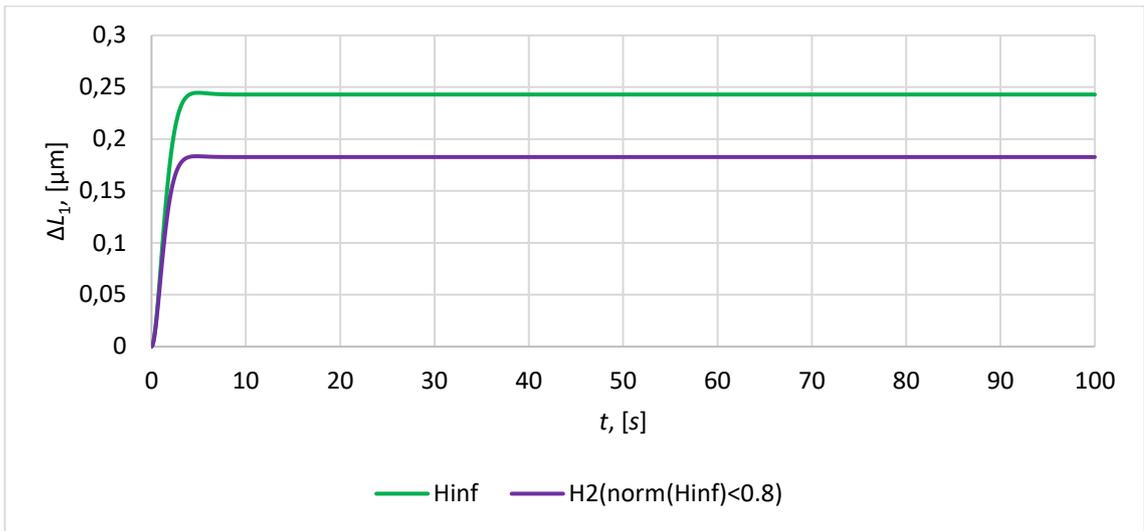


Рисунок 3.3 - Ошибка относительного позиционирования ΔL_1

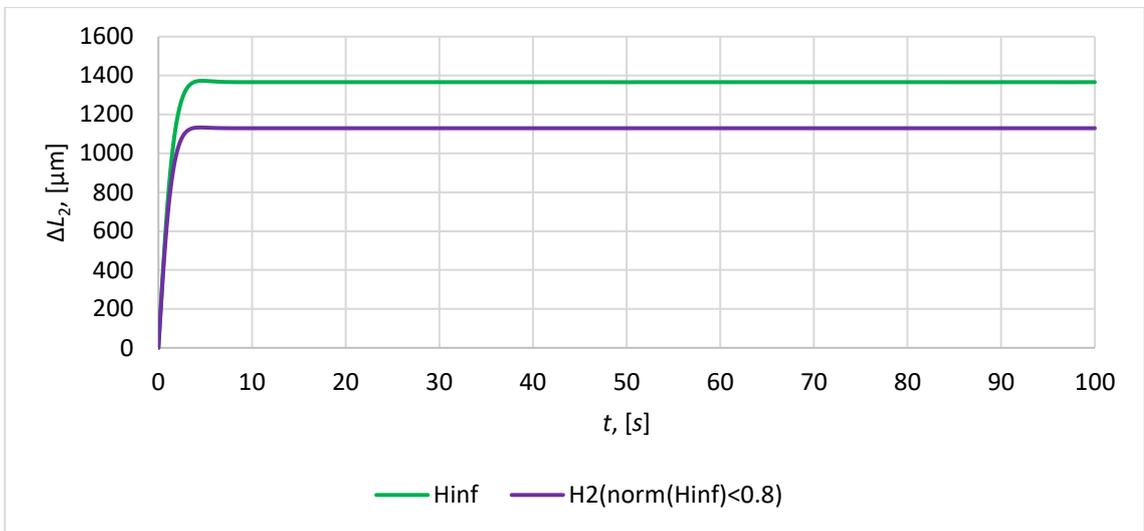


Рисунок 3.4 - Ошибка относительного позиционирования ΔL_2

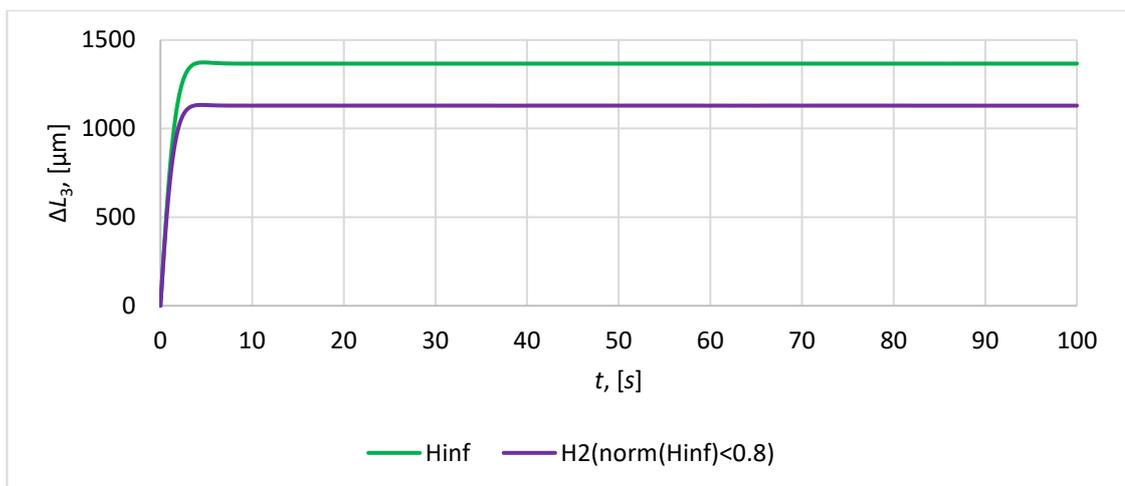


Рисунок 3.5 - Ошибка относительного позиционирования ΔL_3

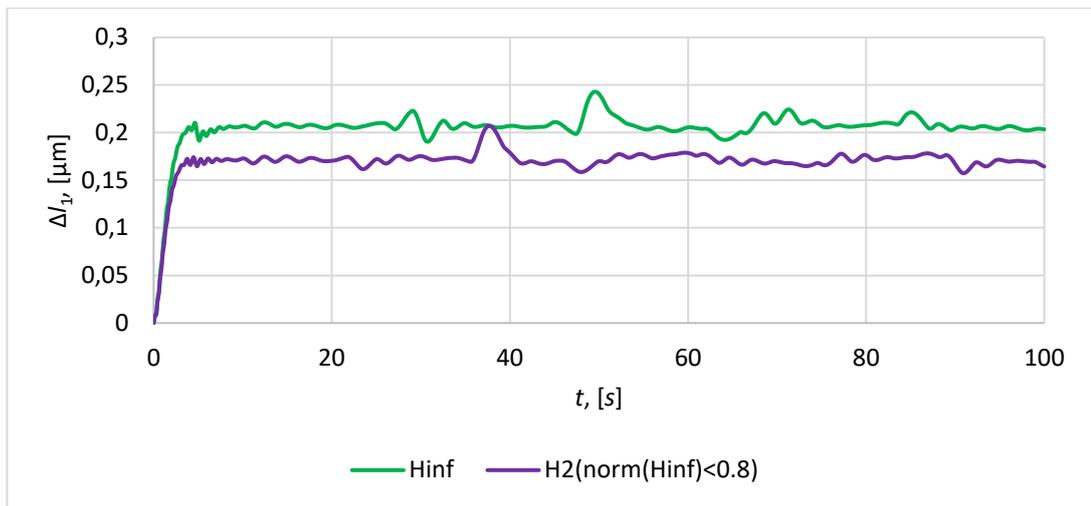


Рисунок 3.6 - Ошибка относительного позиционирования Δl_1

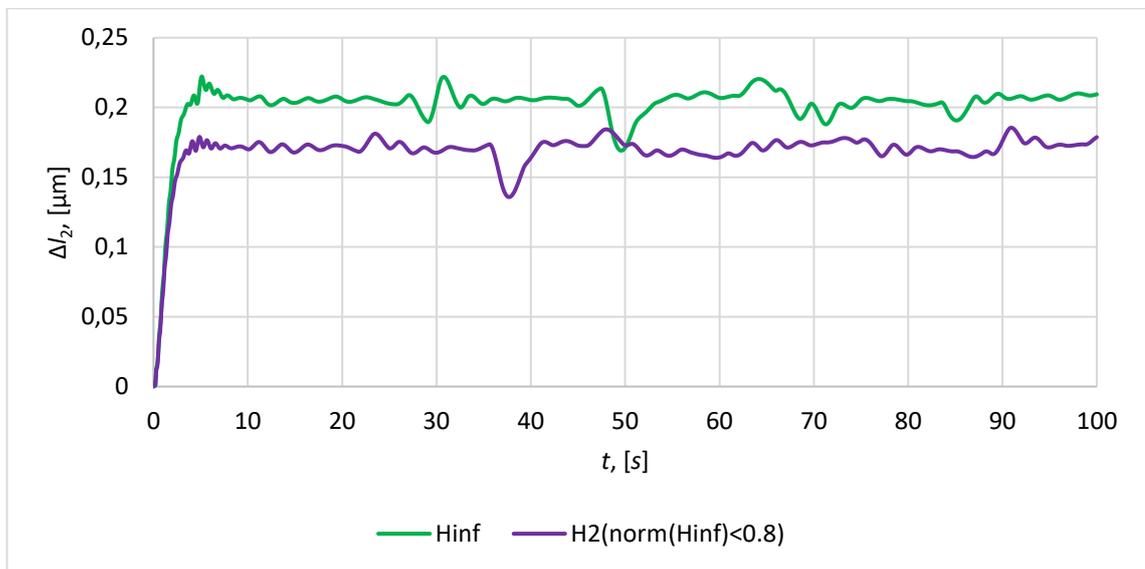


Рисунок 3.7 - Ошибка относительного позиционирования Δl_2

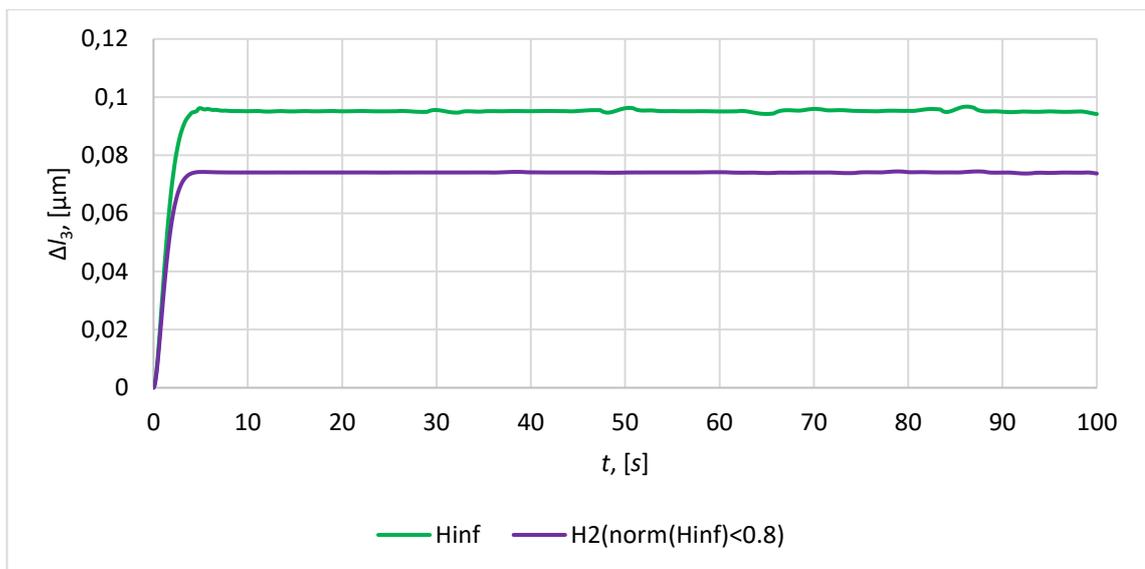


Рисунок 3.8 - Ошибка относительного позиционирования Δl_3

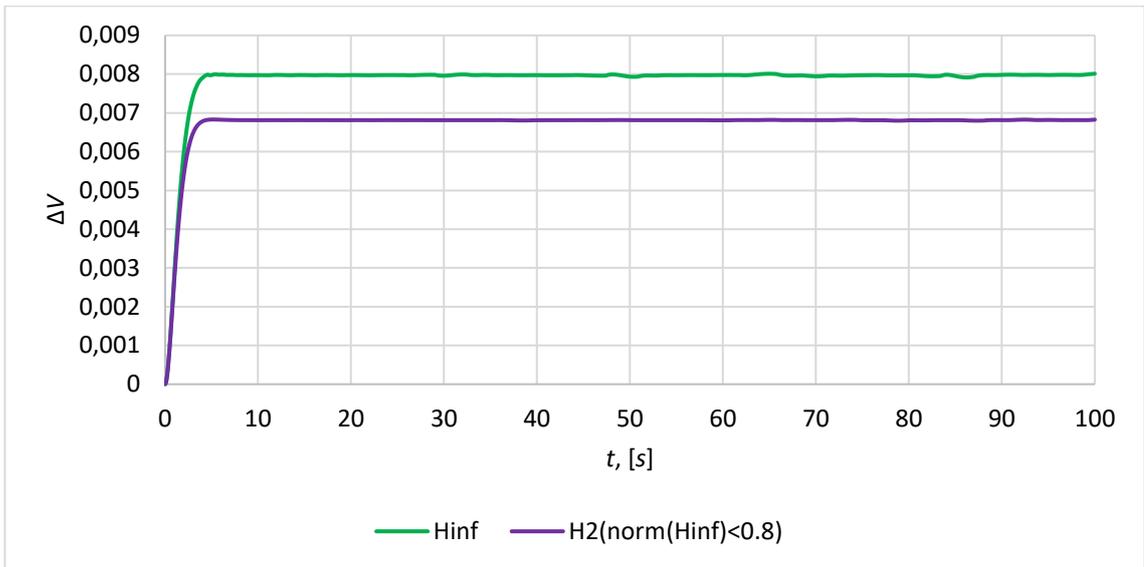


Рисунок 3.9 - Изменение объема ΔV относительно V_0

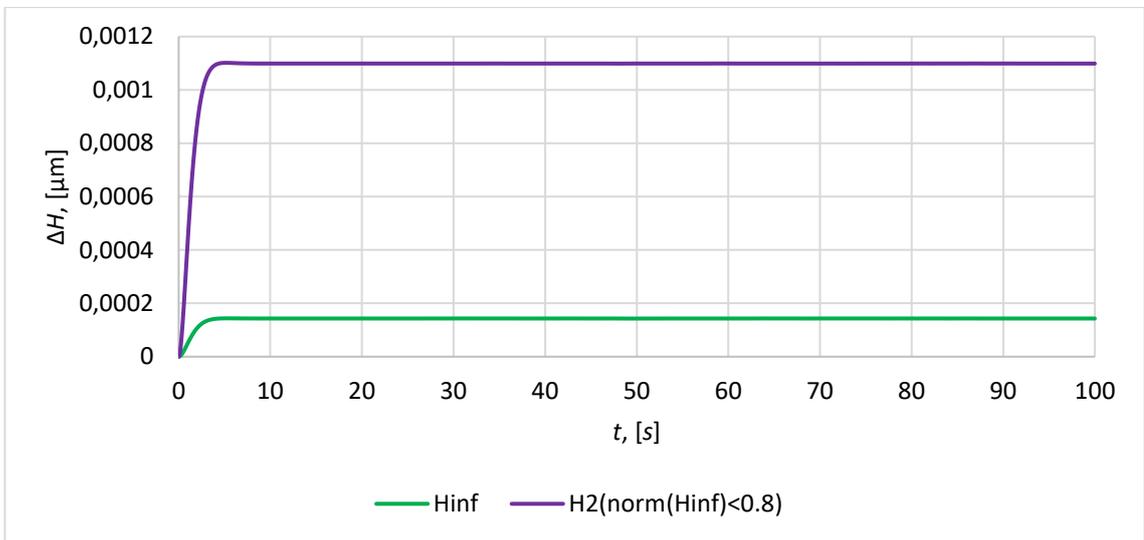


Рисунок 3.10 - Изменение ΔH относительно начального значения высоты тетраэдра H_0

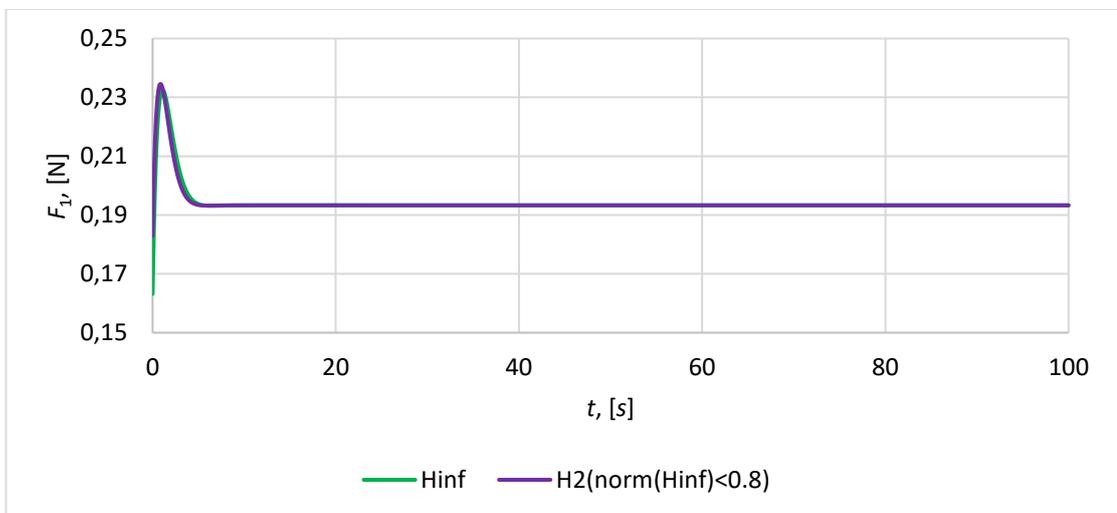


Рисунок 3.11 - Сила тяги для спутника S_1

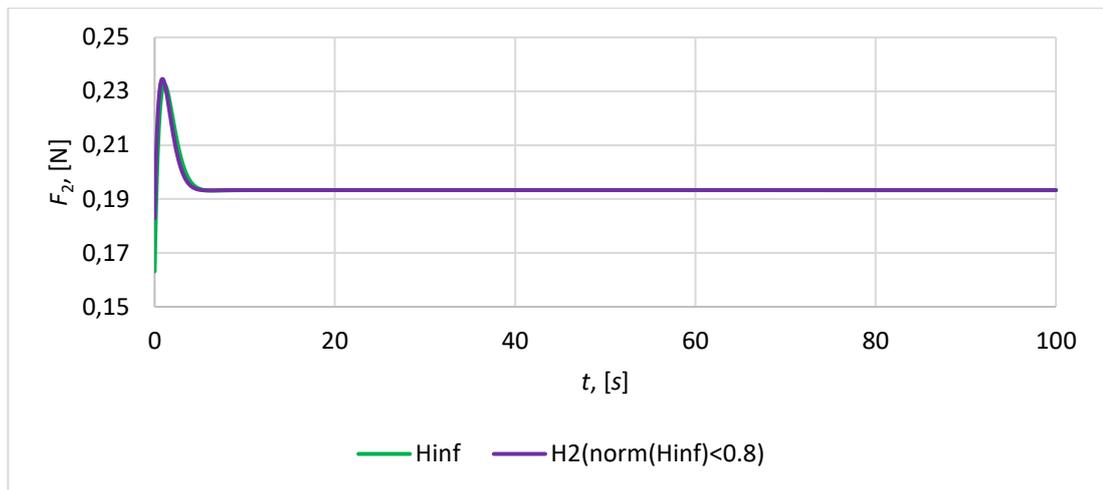


Рисунок 3.12 - Сила тяги для спутника S_2

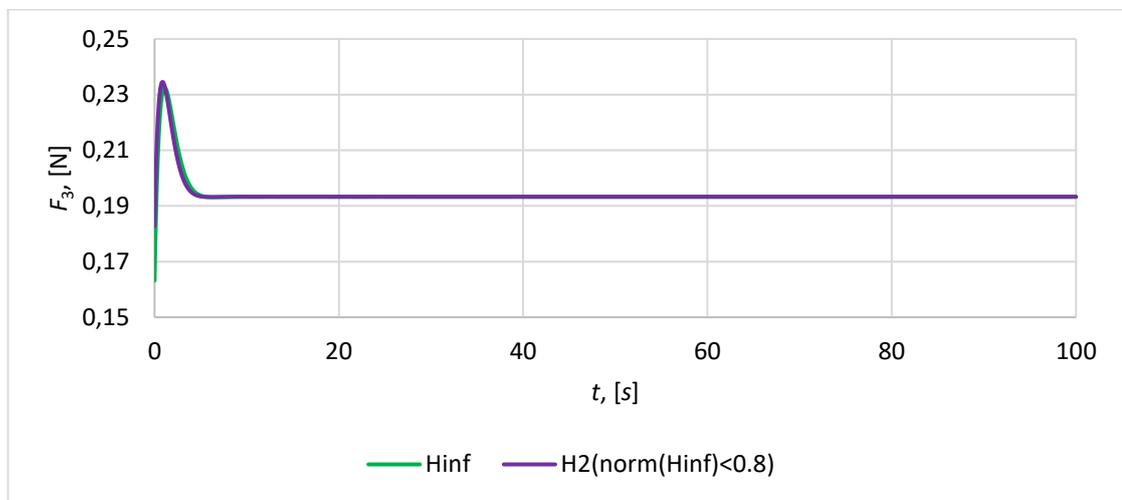


Рисунок 3.13 - Сила тяги для спутника S_3

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что для успешного выполнения миссии группировки спутников, формирующих телескоп предназначенный для мониторинга поверхности Земли, самыми подходящими методами являются управления с помощью регуляторов H_∞ и H_2/H_∞ . Данные методы обеспечивают нужную точность взаимного позиционирования спутников, высокое качество переходных процессов и сохранение конфигурации с высокой точностью. По результатам моделирования и расчета тяги (рисунки 3.11 – 3.13) при использовании двигателей с сжатым газом и удельным импульсом 70 секунд, необходимый расход топлива для спутника составило 9,86 кг в год [89], что отмечает важность необходимости усовершенствования контроллера с целью снижения потребления топлива для спутников, находящихся в группировке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе разработана математическая модель движения спутниковой группировки в условиях невозмущенной опорной орбиты. Проведен разбор неуправляемого движения спутников в группировке, которое показало потребность применения определенных алгоритмов управления для поддержания конфигурации. Были разработаны алгоритмы управления конфигурацией группировки на основе корневого метода (RLM) и линейно-квадратичного регулятора (LQR), а также осуществлен сравнительный анализ их эффективности. Было показано, что эти алгоритмы пригодны для управления взаимным расположением спутников на геостационарных орбитах при соответствующих начальных условиях.

Также была создана математическая модель движения спутниковой группировки с учетом основных возмущающих сил, вызванных гравитационным воздействием Земли, Луны и Солнца. В процессе изучения неуправляемого движения выявлена необходимость введения управления на ранних этапах полета. Рассматривалась задача синтеза системы управления, обеспечивающей сохранение геометрической конфигурации группировки в виде тетраэдра. Были разработаны алгоритмы управления конфигурацией группировки с учетом основных возмущающих сил на основе метода размещения полюсов в LMI областях, метода оптимального управления с минимизацией квадратичного критерия качества и метода квазиоптимального управления с минимизацией нормы H_2 передаточной функции системы управления. Анализ эффективности этих алгоритмов позволил выявить их преимущества и недостатки для построения системы управления.

Создана модель движения спутниковой группировки относительно возмущенной опорной орбиты с использованием модификации модели Лоудена-Седвика-Швайгарда. Построены уравнения возмущенного движения группировки с учетом неоднородности гравитационного поля Земли, воздействия Луны и Солнца, а также давления сил солнечного света. Для решения линеаризованных нелинейных уравнений движения группировки относительно возмущенной орбиты применялись численные методы Рунге-Кутты-Фельберга с переменным шагом интегрирования и алгоритмы Пуллкинена, Фландерна и Стэндиша.

Была разработана система управления, обеспечивающая необходимый уровень устойчивости группировки в условиях возмущенной опорной орбиты и различных неопределенностей, основанная на робастных алгоритмах управления, таких как H_2 и H_∞ .

Основные результаты полученные в ходе выполнения диссертационной работы опубликованы в работах [85, 88-98].

Оценка полноты решений поставленных задач. В результате проведенных исследовательских работ разработаны новые математические модели и разработаны новые алгоритмы управления движением группировки спутников на геостационарной орбите на основе линейных и нелинейных методов. В работе в качестве основных возмущающих сил учитывались

возмущения типа неоднородного поля притяжения Земли, согласно модели Сэдвика-Швайгарда, притяжения Луны и Солнца, и давления Солнечных лучей. В ходе исследования получены результаты которые были опубликованы в нескольких научных изданиях, получив положительную оценку отечественного и зарубежного консультантов, а также зарубежных коллег. Полученные результаты и положительная оценка экспертов подтверждают, что все поставленные в диссертационной работе задачи выполнены и цель исследования достигнута.

Рекомендации по конкретному использованию полученных результатов.

Теоретической значимостью работы является проработка вопросов построения алгоритмов управления движением группировки спутников для ДЗЗ. В связи с тем, что в настоящее время во всем мире достаточно быстро усиливается тенденция разработки малых космических аппаратов, разработанный алгоритм управления может быть использован в различных проектах по запуску группировки на геостационарную орбиту для непрерывного мониторинга поверхности Земли в случае различных чрезвычайных ситуации таких как пожары, паводки и наводнения. Этим определяется практическая значимость исследования.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне с использованием классических вычислительных и апробированных аналитических методов для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Применение в работе сложного математического аппарата теории управления применительно к задачам моделирования движения спутниковых группировок и вносит новизну в их исследовательский аппарат. Работа выполнена на уровне лучших достижений в исследуемой области. В связи с этим результаты данной диссертационной работы конкурентоспособны, выполнены на современном научном уровне и адаптированы под реальные условия для их практического применения в задачах ДЗЗ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hill G.W., Researches in Lunar Theory, American Journal of Mathematics, Volume 1, 1878, Pages 5–26;
2. Clohessy W.H., Wiltshire R.S., Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous, Journal of the Astronautical Sciences, Volume 27, № 9, 1960, Pages 653–678;
3. Q. Yan, V. Kapila, A.G. Sparks, Pulse-based periodic control for spacecraft formation flying // Proceedings of the American Control Conference 1(6), Chicago, Illinois, Volume 1, 2000, Pages 374 – 378, DOI: [10.1109/ACC.2000.878922](https://doi.org/10.1109/ACC.2000.878922)
4. B. Naasz, C.D. Karlgaard, C.D. Hall, Application of several control techniques for the ionospheric observation nanosatellite formation, Advances in the Astronautical Sciences 112, 2002;
5. Ali Hassani, Fariborz Saghafi, Milad Pasand, H_∞ and μ synthesis control of virtual structure satellites formation flying, International Journal of Dynamics and Control 5(3), 2017, DOI: [10.1007/s40435-016-0238-x](https://doi.org/10.1007/s40435-016-0238-x);
6. Jianying Wang and Zhaowei Sun, 6-DOF robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying, Acta Astronautica, Volume 73, April–May 2012, Pages 76-87, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.12.005>;
7. A. Guerman, M. Ovchinnikov, G. Smirnov and S. Trofimov, Closed Relative Trajectories for Formation Flying with Single-Input Control, Mathematical Problems in Engineering Volume 2012, <https://doi.org/10.1155/2012/967248>;
8. D. Ivanov, M. Kushniruk, M. Ovchinnikov, Study of Satellite Formation Flying Control Using Differential Lift and Drag, Acta Astronautica, Volume 152, 2018, Pages 88-100, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.07.047>;
9. Zhi-guo Zhang, Jun-feng Li, Orbit and attitude control of spacecraft formation flying, Applied Mathematics and Mechanics, volume 29, 2008, Pages 43–50;
10. Kapila Vicram, Sparks Andrew G, Buffington James M, Yuan Qiguo. Spacecraft formation flying: dynamics and control // Proceedings of American Control Conference, San Diego, CA, USA, 1999, DOI: [10.1109/ACC.1999.786328](https://doi.org/10.1109/ACC.1999.786328);
11. Fred Y. Hadaegh, Wei-Min Lu, Paul K.C. Wang, Adaptive Control of Formation Flying Spacecraft for Interferometry, IFAC Proceedings Volumes, Volume 31, Issue 20, 1998, Pages 117-122, [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)41782-4](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)41782-4);
12. R.K. Yedavalli, A. Sparks, Satellite formation flying control design based on hybrid control system stability analysis // Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois, 2000, DOI: [10.1109/ACC.2000.879593](https://doi.org/10.1109/ACC.2000.879593);
13. C.R. McInnes, Autonomous ring formation for a planar constellation of satellites, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 18(5), 2012, Pages 1215–1217, <https://doi.org/10.2514/3.21531>;
14. P.K.C. Wang, F.Y. Hadaegh, Coordination and control of multiple microspacecraft moving in formation, Journal of Astronautical Sciences 44 (3), 1996, Pages 315–355;

15. W. Pengji, Y. Di, PD-fuzzy formation control for spacecraft formation flying in elliptical orbits, *Aerospace Science and Technology* Volume 7, Issue 7, 2003, Pages 561–566, [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(03\)00055-5](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(03)00055-5);
16. M. Quingsong, W. Pengji, Y. Di, Low-thrust fuzzy formation keeping for multiple spacecraft flying, *Acta Astronautica* Volume 55, Issue 11, 2004, Pages 895–901, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.04.007>
- 17 Kyle T. Alfried, Srinivas, R.Vadali, Pini Gurfil, Jonathan P. How, Louis S. Breger. *Spacecraft Formation Flying* // Oxford, UK: Elsevier. - 2010. - P.382.
- 18 Yunjun Xu, Norman Fitz-Coy, Rick Lind and Andrew Tatsch. *Control for Satellites Formation Flying* // *Journal Of Aerospace Engineering*. - 2007. - P.1-11.
- 19 Hancheo Cho, Gaëtan Kerschen. *Satellite formation control using continuous adaptive sliding mode controller* // *SPACE Conferences and Exposition*. - Long Beach, California, September 2016. – P.12.
- 20 Quan He, Chao Han. *Dynamics and Control of Satellite Formation Flying Based on Relative Orbit Elements* // *Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit - Honolulu, Hawaii, 18-21 August 2008*. - P.1-12.
- 21 Yanjun Xing, Xibin Cao, Shijie Zhang, Haibo Guo, Feng Wang. *Relative position and attitude estimation for satellite formation with coupled translational and rotational dynamics* // *Acta Astronautica* – 2010. – Vol. 67, Issues 3 - 4, P.455-467.
- 22 Zhang Ke, He Zhenqi and Lv Meibo. *Study on maintaining formations during satellite formation flying based on SDRE and LQR* // *Open Physics*. - 2017. - P.1-6.
- 23 Shawn Baxter McCamish, Marcello Romano, Xiaoping Yun. *Autonomous Distributed Control of Simultaneous Multiple Spacecraft Proximity Maneuvers* // *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 7. - 2010. - P.630-644.
- 24 Djaballah F., Si Mohammed M.A., Boughanmi N. *An implementation of optimal control methods (LQI, LQG, LTR) for geostationary satellite attitude control* // *International Journal of Electrical and Computer Engineering* – 2019. – Vol. 9, Issue 6. P.4728-4737
- 25 Иванов Д.С., Кушнирук М.С. *Исследование алгоритма управления пространственным движением группы спутников с помощью аэродинамической силы* // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. - 2017. - No 53. - С.32.
- 26 S. Mohan, H. Sakamoto, D.W. Miller. *Formation control and reconfiguration through synthetic imaging formation flying testbed (SIFFT)* // *Proc. SPIE, UV/Optical/IR Space Telescopes: Innovative Technologies and Concepts III - San Diego, California, United States*. – Vol. 6687 - 2007.
- 27 Alvar Saenz-Otero, David W.Miller. *SPHERES: a platform for formation-flight research* // *Proceedings of SPIE* - Vol. 5899. - 2005. - P.1-11
- 28 Wei Ren, Randal W. Beard. *Virtual Structure Based Spacecraft Formation Control with Formation Feedback* // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference - Monterey, California, 2002*. – P.1-8.
- 29 Brouard L., Safa F., Crombez V., Laubier D. *Optical aperture synthesis: Limitations and interest for the earth observation* // *Proceedings of SPIE - The*

International Society for Optical Engineering, , 6th International Conference on Space Optics, ICSO 2006 - Noordwijk, Netherlands -2017. – Vol. 10567.

30 Godard Godard, Krishna D. Kumar. Fault Tolerant Reconfigurable Satellite Formations Using Adaptive Variable Structure Techniques // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. - 2010. - Vol.33.-No. 3, P.969-984.

31 Mirhassani, S.M., Ahmadian, J., Ghorbanian, M.J., & Hassan, M.A. Stability of geostationary flying satellite under combined sliding mode and PID control // 2013 IEEE Business Engineering and Industrial Applications Colloquium (BEIAC) – 2013. P.115-119.

32 Najafizadeh Sari N., Jahanshahi H., Fakoor M. Adaptive Fuzzy PID Control Strategy for Spacecraft Attitude Control // International Journal of Fuzzy Systems -2019. - Vol. 21, Issue 3. P.769-781.

33 Clohessy W.H, Wiltshire R.S. Terminal guidance system for satellite rendezvous // Journal of the Aerospace Science – 1960. - Vol. 27: P.653 - 674.

34 G.V. Smirnov, Y. Mashtakov, M. Ovchinnikov, S. Shestakov, A.F.B.A. Prado. Tetrahedron formation of nanosatellites with single-input control // Astrophys Space Sci. - 2018. – Vol. 363, Issue 9 - P.8.

35 Gao Yunfeng, BaoYin He-xi, Li Junfeng. Comparison of Two Methods in Satellite Formation Flying // Applied Mathematics and Mechanics -2003 - Vol. 24, No. 8. P.902-908.

36 Michael Tillerson, Gokhan Inalhan and Jonathan P. How. Co-ordination and control of distributed spacecraft systems using convex optimization techniques // International Journal Of Robust And Nonlinear Control - 2002. - 12: P.207–242.

37 Guo-Ping Liu, Shijie Zhang. A Survey on Formation Control of Small Satellites // Proceedings of the IEEE - 2018. - Vol. 106, Issue: 3. P.440 – 457.

38 Pierre Vignal and Henry Perchinka. Low-Thrust Spacecraft Formation Keeping // Journal of Spacecraft and Rockets - 2006. - Vol. 43, No. 2, P 466-475.

39 Louis Breger, Philip Ferguson, Jonathan How, Stephanie Thomas, Terence McLoughlin, and Mark Campbell. Distributed Control of Formation Flying Spacecraft Built on OA // AIAA GN&C Conference - 2003. - P.1-11.

40 Jaime A. da Silva, Atair Rios Neto. Three-axis stabilized geostationary satellite attitude control using neural predictive algorithms // 10th Brazilian Congress on Computational Intelligence (CBIC'2011), 8-11 November - 2011.

41 Liu H., Tian Y., Lewis F.L., Wan Y., Valavanis K.P. Robust formation flying control for a team of satellites subject to nonlinearities and uncertainties // Aerospace Science and Technology - 2019. - Vol. 95.

42 Wang W., Mengali G., Quarta A.A., Yuan J. Distributed adaptive synchronization for multiple spacecraft formation flying around Lagrange point orbits // Aerospace Science and Technology – 2018. –Vol. 74. P.93-103.

43 M.S. de Queiroz, V. Kapila, Q. Yan. Adaptive nonlinear control of satellite formation flying // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit - August 1999. - P.1596-1604

44 Suzumoto R., Ikari S., Miyamura N., Nakasuka S. Experimental Study for μ m-Class Control of Relative Position and Attitude for Synthetic Aperture

Telescope Using Formation Flying Micro-Satellites // IFAC-PapersOnLine - 2020.
- Vol. 53, No.2. P.5701-5708.

45 Hénault F. Imaging and Nulling Properties of Sparse-Aperture Fizeau Interferometers // Proceedings of the Optical and Infrared Interferometry IV – 2014.
- Vol. 9146. <https://doi.org/10.1117/12.2055069>

46 Rousset G., Mugnier L. M., Cassaing F., Sorrente B. Imaging with Multi-Aperture Optical Telescopes and an Application // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV – Physics – 2001. Vol. 2, No.1. P.17-25.
[https://doi.org/10.1016/S1296-2147\(01\)01158-1](https://doi.org/10.1016/S1296-2147(01)01158-1)

47 Mugnier L., Cassaing F., Rousset G., Baron F., Michau V., Mocœur I., Sorrente B., Velluet M.T. Continuous High-Resolution Earth Observation with Multiple Aperture Optical Telescopes // Proceedings of the OPTRO 2005 International Symposium. - 2005.

48 Mesrine M., Thomas E., Garin S., Blanc P., Alis C., Cassaing F., Laubier D. High Resolution Earth Observation from Geostationary Orbit by Optical Aperture Synthesis // SPIE-Intl Soc Optical Eng. – 2017. – Vol.10567. P.61.

49 Dolkens D., Kuiper J.M. A Deployable Telescope for Sub-Meter Resolutions from Microsatellite Platforms // Proceedings of the International Conference on Space Optics. - 2017. – Vol.10567.
<https://doi.org/10.1117/12.2304245>

50 Cui S., Xu B., Luo S., Xu H., Cai Z., Luo Z., Pu J., Chávez-Cerda S. Determining Topological Charge Based on an Improved Fizeau Interferometer // Optics Express. – 2019. – Vol. 27, No.9. P.12774-12779.
<https://doi.org/10.1364/OE.27.012774>

51 Mugnier L.M., Cassaing F., Rousset G., Sorrente B. Earth Observation from a High Orbit: Pushing the Limits with Synthetic Aperture Optics // RTO SET Symposium: “Space-Based Observation Technology” / Island of Samos, Greece, 16-18 October, 2000.

52 Leitner J., Formation Flying-the Future of Remote Sensing from Space // Proceedings of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics – 2004. P.621.

53 Lawton J., Beard R.W., Hadaegh F.Y. Adaptive Control Approach to Satellite Formation Flying with Relative Distance Constraints // Proceedings of the American Control Conference – 1999. - Vol.3. P.1545-1549. doi: 10.1109/ACC.1999.786084

54 Roberts J.A. Satellite Formation Flying for an Interferometry Mission [PhD thesis] // Cranfield University. - 2005. URL: <https://hdl.handle.net/1826/1114>

55 Rizzieri L. Relative Motion Control of Cluster Formation in a Geostationary Orbit with the J22 Perturbation [Master thesis] // Politecnico Milano. - 2022. URL:

https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/187120/4/2022_04_Rizzieri.pdf

56 Ogundele A.D. Modeling and Analysis of Nonlinear Spacecraft Relative Motion via Harmonic Balance and Lyapunov Function // Aerospace Science and Technology. – 2020. - Vol.99. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105761>

- 57 Inalhan G., Tillerson M., How J.P. Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2002. - Vol.25, No.1. <https://doi.org/10.2514/2.4874>
- 58 Melton, R.G. Time-Explicit Representation of Relative Motion between Elliptical Orbits. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2000. - Vol.23, No.4. <https://doi.org/10.2514/2.4605>
- 59 Gurfil P., Kasdin N.J. Nonlinear Modelling of Spacecraft Relative Motion in the Configuration Space// Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2004. - Vol.27, No.1. <https://doi.org/10.2514/1.9343>
- 60 Ogundele A.D. Nonlinear Dynamics and Control of Spacecraft Relative Motion [PhD thesis] // Auburn University. – 2017.
- 61 Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // American Journal of Mathematics – 1878. Vol.1, No.1. P.5-26 <https://doi.org/10.2307/2369430>
- 62 Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // Journal of the Aerospace Sciences. – 1960. Vol.27, No.9. <https://doi.org/10.2514/8.8704>
- 63 Tschauner J., Hempel P. Rendezvous Zu Einem in Elliptischer Bahn Umlaufenden Ziel // Astronautica Acta. – 1965. - Vol.11. P.104-109.
- 64 Schweighart S.A., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2002. - Vol.25, No.6. <https://doi.org/10.2514/2.4986>
- 65 Alfried K.T., Schaub H. Dynamic and Control of Spacecraft Formations: Challenges and Some Solutions // Journal of the Astronautical Sciences. – 2000. - Vol.48, No.2. P.249-267. doi:10.1007/BF03546279.
- 66 Koon W.S., Marsden J.E., Murray R.M., Masdemont J. J2 Dynamics and Formation Flight // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. - 2001. <https://doi.org/10.2514/6.2001-4090>
- 67 Ginn J.S. Spacecraft Formation Flight: Analysis of the Perturbed J (2)-Modified Hill-Clohessy-Wiltshire Equations [Master thesis] // The University of Texas at Arlington. – 2006. URL: <http://hdl.handle.net/10106/354>
- 68 Schaub H. Incorporating Secular Drifts into the Orbit Element Difference Description of Relative Orbits // Advances in the Astronautical Sciences. – 2003.- Vol.114.
- 69 Sedwick R.J., Miller D.W., Kong E.M.C. Mitigation of Differential Perturbations in Formation Flying Satellite Clusters // Journal of the Astronautical Sciences. – 1999.-Vol.47. P.309-331. doi:10.1007/bf03546206.
- 70 Carter T., Humi M. Clohessy-Wiltshire Equations Modified to Include Quadratic Drag // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2002.-Vol.25, No.6. <https://doi.org/10.2514/2.5010>
- 71 Naasz B.J., Karlgaard C.D., Hall C.D. Application of Several Control Techniques for the Ionospheric Observation Nanosatellite Formation // Proceedings of the Advances in the Astronautical Sciences. – 2002.-Vol.112 II.
- 72 Li J., Chen S., Li C., Wang F. Distributed Game Strategy for Formation Flying of Multiple Spacecraft with Disturbance Rejection // IEEE Transactions on

Aerospace and Electronic Systems. – 2021.-Vol.57, No.1. P.119–128, doi:10.1109/TAES.2020.3010593.

73 Pengji W., Di Y. PD-Fuzzy Formation Control for Spacecraft Formation Flying in Elliptical Orbits // Aerospace Science and Technology. - 2003.-Vol.7, No.7.P.561-566. [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(03\)00055-5](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(03)00055-5)

74 Qingsong M., Pengji W., Di Y. Low-Thrust Fuzzy Formation Keeping for Multiple Spacecraft Flying // Acta Astronautica – 2004.-Vol.55, No.11. P.895-901. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2004.04.007>

75 Liu H., Tian Y., Lewis F.L., Wan Y., Valavanis K.P. Robust Formation Flying Control for a Team of Satellites Subject to Nonlinearities and Uncertainties // Aerospace Science and Technology. – 2019. - Vol.95, 105455. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105455>

76 Curtis H.D. Orbital Mechanics for Engineering Students. – Oxford.: Butterworth-Heinemann, 2010. – 912 p.

77 Lawden D. Fundamentals of space navigation // Journal of the British Interplanetary Society. – 1954. – Vol.13, No.2. P.87–101.

78 Anwei L, Barry J. On the shape of tetrahedra from bisection // Mathematics of computation. – 1994. - Vol. 63, No.207. P.141-154. <https://doi.org/10.2307/2153566>

79 Chilali M., Gahinet P., Apkarian P. Robust Pole Placement in LMI Regions // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1999. Vol.44, No.12. doi:10.1109/9.811208.

80 Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. – Prentice-Hall International, Inc.: Dover Publications, 2007. – 394p.

81 Zolotas A.C., Korba P., Chaudhuri B., Jaimoukha I.M. H2 LMI-Based Robust Control for Damping Oscillations in Power Systems // Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on System of Systems Engineering – SOSE. - 2007.

82 Montenbruck O., Gill E., Lutze F. Satellite orbits: models, methods, and applications // Appl. Mech. Rev. – 2002. – Vol.55., No.2. P.B27-B28.

83 Guffanti T., D’Amico S. Linear models for spacecraft relative motion perturbed by solar radiation pressure // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2019. Vol.42, No.9. P.1962-1981.

84 Standish E. M., Williams J. G. // Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. Ch.8. P.1381-1391.

85 Z.B. Rakisheva, Sh. Nakasuka, N.S. Doszhan, G.E. Ibrayev. Stabilization of the movement of a small spacecraft in a geostationary orbit. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. № 6 (438), 2019, p. 112-120, DOI: 10.32014/2019.2518-170X.162.

86 Gahinet P., Apkarian P. A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1994. Vol.4. No.4. P.421-448. <https://doi.org/10.1002/rnc.4590040403>

87 Apkarian P., Noll D., Rondepierre A. Mixed H_2/H_∞ Control via Nonsmooth Optimization // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2008. Vol.47, No.3. P.1516-1546 doi:10.1137/070685026.

88 Z.Rakisheva, A. Sukhenko, N. Doszhan, G.-G.A. Ibrayev, N. Kaliyeva, Sh. Nakasuka, and Y. Shabdan. Evaluation of Applicability of Some Algorithms for Controlling the Motion of Satellites in a Formation // Engineered Science – 2024. Vol. 27(1025), <http://dx.doi.org/10.30919/es1025>;

89 N.Kaliyeva, Z.Rakisheva, N.Doszhan*, A.Sukhenko, G.-G.A.Ibrayev, Sh.Nakasuka, and Y.Shabdan. Relative Dynamics and Control of Satellite Formation Flying Representing the Synthetic Aperture Telescope on Geostationary Orbit // Engineered Science. – 2024. DOI: <http://dx.doi.org/10.30919/es1131>

90 N.Doszhan, G.-G.A.Ibrayev, R.Pilpani. Ultra-High Accurate Attitude Determination and Control of Microsatellite Formation Flight // Balkan Journal of Electrical and Computer Engineering, Vol. 6, No. 4, 2018. - P.47-51. DOI: 10.17694/bajece.475540;

91 N.Doszhan, G.-G.A.Ibrayev, R.Pilpani. Ultra-High Accurate Attitude Determination and Control of Microsatellite Formation Flight // Proceedings of the International scientific conference “ALTERNATIVE ENERGY SOURCES, MATERIALS AND TECHNOLOGIES (AESMT’18)” 14 – 15 May, 2018, Plovdiv, Bulgaria;

92 Ракишева З.Б., Ибраев Г.Е., Досжан Н.С. Вывод уравнений движения группировки КА. Сборник докладов Второго Межд-го Джолдасбековского Симпозиума «МЕХАНИКА БУДУЩЕГО» 1-5 марта 2021 года, Алматы. ISBN 978-601-08-0953-6, стр. 295-302.

93 З.Б.Ракишева, Н.С.Досжан, А.Мухамедгали, Ж.Т.Лязат. Расчет параметров электромагнитного исполнительного органа и разработка программы управления. Вестник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева (Научный журнал). №1(75), 2017. 79-83 с.;

94 Ракишева З.Б., Мухамедгали А., Досжан Н.С., Лязат Ж.Т. Разработка имитатора магнитного поля Земли. Вестник ПГУ. №1,2017. 262-266 с.;

95 О.К. Туенбаев, Ж.Лязат, Н.Досжан, А. Мухамедгали, Н.Узбеков, Б.Ханиев. Детальное проектирование наземного комплекса управления наноспутника. Вестник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева (Научный журнал). №4(78), 2017. 98-106 с.;

96 Zhilisbayeva K., Doszhan N., Saspayeva A. Changing the magnetic field intensity during the motion of spacecraft. International Journal of Mathematics and Physics. Vol(7) №1, 2016. 56-64 pp.;

97 Досжан Н.С., А. Мухамедгали, Е. Шабдан. Обзор испытаний в термовакуумной камере малого космического аппарата. Вестник КазНТУ. №5(111),2015. 523-529 с;

98 З.Б. Ракишева, Н.Б. Калиева, Н.С. Досжан. Проектирование системы управления движением группировки спутников для дистанционного

зондирования Земли. Алматы: Қазақ университеті, 2023. - 68с. ISBN 978-601-04-6497-1. (Монография).